Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Хорошилова

КУРС СЕМИНАРОВ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(Самоучитель)

Книга 2

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
для очной и дистанционной форм обучения
студентов университетов

Москва—2020

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5

ББК 22.16

Х82

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты:
д.ф.-м.н. Мухин С.И., д.ф.-м.н. Фомичёв В.В. (ВМК МГУ)

Хорошилова Е.В.

Х 82 Курс семинаров по математическому анализу. (Самоучитель) – В 4-х кн. – Кн. 2: Функции одной действительной переменной: Дифференциальное исчисление. Неопределённый интеграл. Учеб. пособие для очной и дистанционной форм обучения студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2020. – 000с.

Пособие посвящено отработке навыков основных видов исследований по теме «Функции одной действительной переменной», изучаемой студентами на 1-м курсе университетов (дифференцируемость функций, включая производные и дифференциалы высших порядков; раскрытие неопределённостей; основные теоремы дифференциального исчисления; неопределённый интеграл и методы его вычисления). В книге приводятся необходимые теоретические сведения. Основной акцент делается на систематизации *приёмов и методов решения задач*. Изложение методов сопровождается разбором примеров и задачами для самостоятельного решения (с подробными решениями).

Книга включает более 356 задач и 164 примеров и рекомендуется как самоучитель (справочное пособие) при работе в течение семестра, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам.

Рекомендуется студентам младших курсов университетов, обучающихся математическим специальностям.

УДК 378.4: 517.1: 517.2: 517.5
ББК 22.16

ISBN 000-0-00000-000-0

Содержание

1 СЕМИНАР: Дифференцируемость: производная и дифференциал

«Всякий, кто не может разобраться в математике, — не вполне человек. В лучшем случае — безвредный недочеловек, научившийся носить обувь, мыться и не мусорить в доме».

Роберт Энсон Хайнлайн (1907–1988) – американский писатель, один из крупнейших писателей-фантастов, во многом определивший лицо современной научной фантастики.

1.1 Понятие производной явно заданной функции

Вычисление производных, изучение и использование их свойств составляют главный предмет дифференциального исчисления.[1] Производная функции в точке – основное понятие, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Понятие производной возникло в 17 веке в связи с необходимостью решения задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного неравномерного (ускоренного) движения и построения касательной к произвольной плоской кривой. Немецкий учёный Готфрид Вильгельм *Лейбниц* (1646–1716) ввёл обозначения dx для бесконечно малого приращения аргумента и dy – для обозначения бесконечно малого приращения функции и назвал их дифференциалами (см. строгое определение дифференциала функции далее). Поэтому ныне употребляемый символ производной $\frac{dy}{dx}$ берёт свое начало от Лейбница.

Греческой буквой Δ в середине 18 века Леонард *Эйлер* (1707–1783) стал пользоваться для обозначения (не обязательно бесконечно малых) приращений переменных. Обозначения y' и $f'(x)$ для производной ввёл французский учёный Жозеф

[1] *Дифференциальное исчисление* – раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций.

Луи *Лагранж* (1736–1813). В физике и механике в некоторых случаях производные по времени обозначают точками над буквой: $\dot{y} = ax$.

Определение производной. Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Подробнее, пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x в точке x_0 малое приращение Δx (так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы окрестности) и получим соответствующее приращение функции $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Составим разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и устремим $\Delta x \to 0$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то его называют *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}$. Этот предел допускает эквивалентную форму:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пример 1. Найти $f'(x_0)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$), если $y(x) = \sin x$.

Решение. Применяя определение, получаем

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \cos x_0. \ \square$$

1.2 Понятие дифференциала функции. Дифференцируемость в точке и на множестве. Связь между дифференциалом и производной

Понятие производной функции тесно связано с понятием дифференциала. Сформулируем определение дифференциала (по Лагранжу). Пусть приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует приращение функции $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Пусть, кроме того, это приращение $\Delta y(x_0)$ при любом достаточно малом Δx представимо в виде

$$\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $A(x_0)$ – некоторое число, не зависящее от Δx, и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Так как второй член $\alpha(\Delta x)\Delta x$ в этой сумме является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δx, то последнее равенство может быть переписано в эквивалентном виде:

$$\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда выражение $A(x_0)\Delta x$, т. е. главную, линейную относительно Δx, часть приращения функции, принято называть *первым дифференциалом* функции $f(x)$ (или дифференциалом первого порядка) в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначать

$$dy(x_0) = A(x_0)\Delta x.$$

При этом функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, а процесс вычисления производной (дифференциала) — *дифференцированием.*

По определению, функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* (a, b), если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Функция называется *непрерывно дифференцируемой на интервале* (a, b), если её производная $f'(x)$ непрерывна на этом интервале.

В частности, для функции $y \equiv x$ в любой точке x_0 получаем $\Delta y = \Delta x$ и, следовательно, $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал dx, взятый по переменной x (т. е. отвечающий приращению Δx этой переменной), всегда совпадает с её приращением и выражение для дифференциала можно переписать в виде

$$dy(x_0) = A(x_0)dx.$$

Дифференциал можно рассматривать также как функцию двух независимых переменных, поскольку он зависит от аргумента x_0 и приращения Δx. При этом приращение Δx в определении дифференциала считается произвольным, но достаточно малым, так что существование дифференциала (производной) в точке – локальное свойство функции.

Пример 2. Найти, используя определение, дифференциал функции

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

а) в произвольной точке x_0; б) в точке $x_0 = 1$.

Решение. Выпишем для этого приращение функции, отвечающее малому приращению аргумента Δx:

$$\Delta y(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2+3(x_0+\Delta x)-1-(x_0^2+3x_0-1)$$

$$= (2x_0+3)\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x_0+3)\Delta x + o(\Delta x),$$

откуда, выделяя линейную по Δx часть приращения функции, находим $dy(x_0) = (2x_0+3)\Delta x$, или $dy(x_0) = (2x_0+3)dx$. В частности, в точке $x_0 = 1$ дифференциал равен $dy(1) = 5dx$. □

Остаётся вопрос: что такое $A(x_0)$ в общем случае и как найти эту величину? Покажем, что между существованием у функции $y = f(x)$ дифференциала в точке x_0 и существованием у неё в этой точке производной имеется непосредственная связь, при этом $A(x_0) = f'(x_0)$.

T1 (*о связи между дифференциалом и производной*). Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную[1] тогда и только тогда, когда у неё в этой точке существует первый дифференциал, причём справедливы соотношения[2]

$$dy = f'(x_0)dx, \quad f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Замечание 1. Дифференциал функции в точке x_0 пропорционален приращению аргумента в этой точке, а коэффициент

[1] по независимой переменной x.

[2] Здесь первое равенство – известная формула для нахождения первого дифференциала в случае, когда x – независимая переменная. Ниже будет показано, что такой же вид имеет первый дифференциал сложной функции $f(x(t))$ в случае, когда $x(t)$ – дифференцируемая функция. Второе равенство означает, что производную функции можно воспринимать алгебраически как отношение дифференциалов функции и аргумента.

пропорциональности равен значению производной $f'(x_0)$ в этой точке.

Замечание 2. Заметим, что если x является функцией $x(t)$ переменной t, определение дифференциала

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{1}$$

отличается от формулы

$$dy = f'(x)dx, \tag{2}$$

поскольку в общем случае приращение функции Δx, очевидно, не равно её дифференциалу dx (даже если он существует).

Пример 3. Например, если $x = \ln(t)$, то

$$\Delta x = \ln(t + \Delta t) - \ln(t) = \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right), \quad dx = \frac{\Delta t}{t}$$

и тогда формула (1) имеет вид $dy = f'(\ln(t)) \cdot \ln(1 + \frac{\Delta t}{t})$, а формула (2) имеет вид $dy = f'(\ln(t)) \cdot \frac{\Delta t}{t}$. При фиксированном t и стремлении Δt к нулю эти дифференциалы – эквивалентные бесконечно малые, но они не равны, т. е. (1) не совпадает с (2). □

Отметим, что дифференциал (1) отличается от дифференциала (2) также тем, что существует для более широкого класса функций $x(t)$. Так, в (1) функция $x(t)$ может быть непрерывной, но не дифференцируемой, а в (2) такое невозможно, так как тогда не существует dx. Например, для кусочно-гладкой функции $x(t)$ в точке t её излома можно выписать приращение Δx, порождённое числами t и Δt, но при этом dx не существует.

1.3 Геометрический смысл производной и дифференциала. Приближение функции в окрестности точки дифференциалом

Физический смысл производной $f'(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она характеризует мгновенную скорость изменения функции $f(x)$ в этой точке (вдоль оси Ox).

Геометрический смысл производной и дифференциала. Наличие у функции $y = f(x)$ производной (дифференциала) в точке x_0 означает, что в точке с этой абсциссой график функции имеет касательную, причём в окрестности точки касательная служит линейным приближением к графику функции. Более того, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ существует тогда и только тогда, когда функция имеет в этой точке производную. Бесконечной производной соответствует вертикальная касательная.

Уравнение (наклонной) касательной[1] к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

причём линейная относительно приращения $x - x_0$ аргумента функция $f'(x_0)(x - x_0)$ в правой части уравнения есть дифференциал $dy(x_0)$. Касательная является лучшим линейным приближением графика функции в окрестности точки касания (и вовсе не обязана иметь с ним единственную общую точку, как это бывает в случае с выпуклыми функциями).

Как видим, производная $f'(x_0)$ численно равна угловому коэффициенту касательной в точке $(x_0, f(x_0))$: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к положительному направлению оси абсции ($0 \le \alpha < \pi$). При этом положительной производной с точке x_0 соответствует положительный угол наклона касательной, а отрицательной производной, соответственно, – отрицательный угол наклона касательной.

Если геометрически приращение Δy функции в точке x_0 можно интерпретировать как приращение (вообще говоря, нелинейное) ординаты точки на графике функции при изменении её абсциссы на Δx (или, что то же самое, на dx), то дифференциал df функции в точке x_0 – это линейное приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы на dx (сделайте рисунок).

[1] Пусть $M_0(x_0; f(x_0))$, $M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ – точки на графике функции. Если существует предельное положение секущей M_0M при $\Delta x \to 0$, то оно называется *касательной* к графику функции в точке M_0.

Итак, функция дифференцируема в точке, если её приращение в этой точке как функция приращения аргумента является линейной с точности до поправки, бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ в сравнении с приращением аргумента. А дифференциал при этом доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки.

Приближение функции в окрестности точки дифференциалом. Знание дифференциала в точке позволяет приближённо вычислить значение функции в небольшой окрестности этой точки. В самом деле, рассмотрим приближённое равенство $\Delta y \approx dy$. Его геометрический смысл состоит в том, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0, как следует из определения дифференциала

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \alpha)\Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая в этой окрестности функция, сколь угодно близко приближается к графику касательной

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Для приближённого вычисления значения функции f в точке $x_0 + \Delta x$ бесконечно малую функцию $\alpha\Delta x$ можно отбросить:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + df(x_0).$$

Получили, что приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме её значения в этой точке и дифференциала в этой же точке (формула линеаризации). Получающаяся при такой аппроксимации погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Пример 4. Вычислить приближенно значение $\sqrt[3]{8,24}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, в качестве x_0 возьмём 8, в качестве приращения $\Delta x = 0,24$, $f(8) = 2$, найдём в точке $x_0 = 8$ производную

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(8) = \frac{1}{12}$$

и дифференциал

$$df(8) = f'(8)\Delta x = \frac{1}{12} \cdot 0,24 = 0,02.$$

По формуле линеаризации окончательно получим искомое приближение:

$$\sqrt[3]{8,24} \approx 2 + 0,02 = 2,02. \ \square$$

1.4 Связь дифференцируемости и непрерывности

T2. Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную (дифференцируема) в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 5. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$. $\square$

Следствие. Разрывная в точке x_0 функция не может иметь производную в этой точке.

Пример 6. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной, так как разрывна в этой точке. $\square$

Итак, для того чтобы функция имела производную в точке x_0, необходимо (но не достаточно), чтобы она была непрерывна в этой точке.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная допускает на множестве X конечное число точек разрыва (первого рода), то такая функция называется *кусочно-гладкой* на X.

1.5 Односторонние производные. Необходимое и достаточное условие существования производной в точке

Односторонние производные. По аналогии с понятием непрерывности функции в точке слева и справа, введём понятие левой и правой производных. Так, *левая производная* (производная в точке x_0 слева) определяется как предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

а *правая производная*, соответственно, как предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

T3 (*необходимое и достаточное условие существования производной в точке*). Непрерывная функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда у неё в этой точке существуют обе (конечные) односторонние производные и они равны:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \ (= f'(x_0)).$$

Пример 7. Функция

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ x|x|, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x_0 = 0$, поскольку

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad \text{и } f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0,$$

а функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не дифференцируема, так как

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1. \ \square$$

1.6 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций

Эти вопросы мы уже рассматривали ранее, когда учились технике дифференцирования, поэтому напомним основное.

T4 (*об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями*). Если функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке будут дифференцируемы их сумма, разность, произведение и частное (последнее при условии $v(x_0) \neq 0$), причём их первые производные и дифференциалы удовлетворяют соотношениям:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(uv)' = u'v + v'u, \quad d(uv) = vdu + udv;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \; (v \neq 0).$$

Следствие. Производная и дифференциал произведения n функций:

$$(u_1 u_2 ... u_n)' = u_1' u_2 ... u_n + u_1 u_2' ... u_n + ... + u_1 u_2 ... u_n',$$

$$d(u_1 u_2 ... u_n) = d(u_1) u_2 ... u_n + u_1 d(u_2) ... u_n + ... + u_1 u_2 ... d(u_n).$$

1.7 Производная и дифференциал сложной функции. Почленное дифференцирование равенств

Выше мы рассмотрели случай независимой переменной x. Пусть теперь $x = x(t)$ – функция (независимой) переменной t, или зависимая переменная.

T5 (*производная и дифференциал сложной функции*). Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0, причём

$$(f(\varphi(t))'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0),$$

$$df(x(t))\Big|_{t=t_0} = f'(x_0) dx(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) dt = (f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)) dt =$$

$$= (f(\varphi(t))'\Big|_{t=t_0} dt.$$

Это свойство иногда называют *свойством инвариантности первого дифференциала* сложной функции (относительно замены аргумента). Суть его состоит в том, что первый дифференциал имеет один и тот же вид произведения первой производной и дифференциала переменной ($dy = f'(x_0)dx$) независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторого аргумента t.

T6 (*о почленном дифференцировании равенств*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на множестве X и $\forall x \in X\ f(x) = g(x)$, то $f'(x) = g'(x)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 8. Например, функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 + 1$ не являются тождественно равными на множестве $\mathbb{R}$ (более того, их значения не совпадают ни в одной точке), в то же время их производные при всех x равны: $f'(x) = 2x = g'(x)$. $\square$

1.8 Теорема о характере точек разрыва производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. О производной периодической и чётной функций

T7 (*о характере точек разрыва производной*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда её производная $f'(x)$ не может иметь на этом интервале ни устранимых разрывов, ни разрывов 1-го рода (только разрывы 2-го рода).

T8 (*Дарбу, о промежуточных значениях производной*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A, B), $A < a < b < B$, $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ из сегмента $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$) найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $f'(c) = \gamma$.

T9 (*о производной периодической функции*).[1] Производная периодической функции есть периодическая функция, причём с тем же периодом T.

T10 (*о производной чётной и нечётной функций*).[2] Про-

[1]Функция $f(x)$, определённая на множестве X, называется *периодической*, если существует такое неравное нулю действительное число T (называемое *периодом*), что: 1) для всех $x \in X$ числа $x \pm T$ также принадлежат X; 2) для всех $x \in X$ выполняется условие периодичности $f(x+T) = f(x)$. Наименьший положительный период T называется главным (основным) периодом функции.

[2]Функция $f(x)$, определённая на множестве X (симметричном относи-

изводная чётной дифференцируемой функции есть функция нечётная, а производная нечётной дифференцируемой функции есть функция чётная.

1.9 Задачи

Найти дифференциал dy функции в произвольной точке x:

№1. $y = \sin^2 x + 5x^3 - 2x$;

№2. $y = 2^x \cos x$;

№3. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

№4. $y = (u(x) - 2) \cdot \ln(1 + v(x))$, где $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной x;

№5. $y = f(u)$, где $u(x) = e^{4x} \cdot \cos 2x$ ($f(u)$ – дифференцируемая функция).

№6. [6, № 1096(а,б)] Упростить отношения дифференциалов

$$\text{а) } \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}; \quad \text{б) } \frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

№7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Чему равен предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \,?$$

№8. [6, № 833] Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n – натуральное число, то

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'(x). \tag{1}$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле.

тельно точки $x = 0$) называется *чётной* (*нечётной*), если $\forall\, x \in X$ выполняется $f(-x) = f(x)$ (соответственно, $f(-x) = -f(x)$).

№9. Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$ и дифференцируемая ровно в одной точке?

№10. Пусть $f(x) = |\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2 x$. Во всех ли точках дифференцируема эта функция? Найти $f'(\pi)$ и $f'(-\pi)$ в случае утвердительного ответа.

№11. [6, № 991] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

№12. [6, № 992] При каком условии функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

а) непрерывна при $x = 0$; б) дифференцируема при $x = 0$;
в) имеет непрерывную производную при $x = 0$?

№13. [6, № 994] Найти $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

№14. [6, № 998] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

имеет производную лишь при $x = 0$.

№15. [6, № 1009.1] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производных.

№16. [6, № 1009.2] Пусть x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}$$

и
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h}$$
называются *обобщёнными* односторонними (соответственно, левой и правой) производными функции $f(x)$ в точке x_0.

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точке разрыва x_0 функции $f(x)$, если: а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

№17. [6, №1010] Пусть
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant x_0, \\ ax+b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$
Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

№18. [6, №1014] Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0? Рассмотреть примеры: 1) $f(x) = |x|$, $g(x) = 1 - |x|$ в точке $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \{x\}$, $g(x) = [x]$ при $x_0 \in \mathbb{Z}$.

№19. [6, №1015] Можно ли утверждать, что произведение $F(x) = f(x)\cdot g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0; б) обе функции не имеют производной в точке x_0? Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

№20. [6, №1016(а,б,в)] Что можно сказать о дифференцируемости сложной функции $F(x) = f(g(x))$ в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(g)$ имеет производную в точке $g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(g)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) обе функции $f(g)$ и $g(x)$ не дифференцируемы в соответствующих точках $g(x_0)$ и x_0. Рассмотреть примеры:

а) $f(g) = g^2$, $g(x) = |x|$; б) $f(g) = |g|$, $g(x) = x^2$;

в) $f(g) = \chi(g)$, $g(x) = \chi(x)$, где $\chi(\cdot)$ – функция Дирихле.

№21. [6, №1020] Если функция $f(x)$ дифференцируема в конечном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$? Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

№22. [6, №1023] Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

№23. [6, №1027] Доказать, что производная чётной дифференцируемой функции есть функция нечётная, а производная нечётной дифференцируемой функции есть функция чётная.

№24. [6, №1028] Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

№25. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, а её производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода.

№26. [6, №1083] Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить: 1) приращение $\Delta f(1)$ функции в точке $x = 1$; 2) первый дифференциал $df(1)$ функции в этой точке.

1.10 Ответы и решения

1. Имеем

$$d(\sin^2 x + 5x^3 - 2x) = d(\sin^2 x) + d(5x^3) - d(2x) =$$

$$= 2\sin x \cos x dx + 15x^2 dx - 2dx = (\sin 2x + 15x^2 - 2)dx.$$

2. Имеем

$$d(2^x \cos x) = \cos x d(2^x) + 2^x d(\cos x) =$$

$$= \cos x 2^x \ln 2 dx + 2^x(-\sin x)dx = (\cos x \ln 2 - \sin x)2^x dx.$$

3. Имеем

$$d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}\cdot d(\ln x) - \ln x \cdot d(\sqrt{x})}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}dx\right) - \ln x\left(d\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right)}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx,\ x > 0.$$

4. Имеем $dy = y'dx = \left(u'\cdot\ln(1+v) + (u-2)\cdot\dfrac{v'}{1+v}\right)dx.$

5. По формуле для первого дифференциала имеем: $dy = f'(u)du$, где $du = u'(x)dx = (4e^{4x}\cos 2x + e^{4x}(-2\sin 2x))dx = 2e^{4x}(2\cos 2x - \sin 2x)dx$. Подставляя, окончательно получаем $dy = f'(u)\cdot 2e^{4x}(2\cos 2x - \sin 2x)dx$.

6. а) Имеем

$$\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} = \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8)dx}{3x^2 dx} = 1 - 4x^3 - 3x^6.$$

б) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \dfrac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx}{2xdx} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^3}.$

7. Из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 следует её непрерывность в этой точке, т. е. равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0.$

8. По определению производной существует конечный предел
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$
при произвольном стремлении Δx к 0. Пусть $\Delta x=\frac{1}{n}$. Тогда равенство (1) доказано.

Обратное, вообще говоря, неверно, и при других способах стремления Δx к 0 предел может не существовать. Рассмотрим функцию Дирихле:
$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\mathbb{Q};\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$
Поскольку $\frac{1}{n}$ – рациональное число, то $n\left(\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right)=0$ при любом x и n. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right)=0$. В действительности функция $\chi(x)$ не имеет производной. В самом деле, пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность иррациональных чисел, которая при $n\to\infty$ стремится к $+\infty$. Пусть, далее, x – рациональное число. Тогда $x+\frac{1}{\xi_n}$ – иррациональное число и, по определению функции Дирихле, имеем $\chi\left(x+\frac{1}{\xi_n}\right)-\chi(x)=-1$, а предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n\left(\chi\left(x+\frac{1}{\xi_n}\right)-\chi(x)\right)=-\infty$. Так как результат зависит от способа стремления Δx к нулю, то приходим к выводу, что обратное утверждение неверно.

Можно было обосновать недифференцируемость иначе, сославшись на то, что функция Дирихле разрывна в каждой точке, а никакая функция не может быть дифференцируема в точке разрыва.

9. Да, например, $y(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\in\mathbb{Q};\\ -x^2, & \text{если } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$ Данная функция дифференцируема только в точке $x=0$ и $f'(0)=0$ (в остальных точках она разрывна и, следовательно, не дифференцируема).

10. Да; $f'(\pi)=f'(-\pi)=0$. Решение. При $x\neq\pm\pi$ имеем
$$f(x)=\begin{cases}(\pi^2-x^2)\sin^2 x, & \text{если } -\pi<x<\pi,\\ (x^2-\pi^2)\sin^2 x, & \text{если } (-\infty,\pi)\bigcup(\pi,+\infty),\end{cases}$$

и производная вычисляется по обычным правилам дифференцирования.

Исследуем функцию на дифференцируемость в точках $x = \pm\pi$, воспользовавшись определением производной (пользоваться стандартными формулами дифференцирования в данном случае нельзя):

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{|\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2 x}{x - \pi}.$$

Переходя под знаком предела к переменной $t = x - \pi$, получим

$$\lim_{t\to 0} \frac{|t||2\pi + t| \sin^2 t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t||2\pi + t|t^2}{t} = \lim_{t\to 0} |t||2\pi + t|t = 0.$$

Аналогично и $f'(-\pi) = 0$. Таким образом, функция дифференцируема во всех точках.

11. По правилу вычисления производной от произведения функций имеем при $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. В точке $x = 0$ по определению производной получим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Исследуем $f'(x)$ на непрерывность. Очевидно, при $x \neq 0$ $f'(x)$ непрерывна во всей области определения. В точке $x = 0$ эта функция непрерывна, если $f'(-0) = f'(+0) = f'(0)$, но $f'(\pm 0) = \lim\limits_{\Delta x\to\pm 0} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ не существуют, поэтому функция разрывна в нуле.

12. а) Из определения непрерывности функции следует, что должны существовать односторонние пределы $f(-0)$, $f(+0)$ и, кроме того, $f(-0) = f(+0) = f(0)$. Имеем

$$f(\pm 0) = \lim_{\Delta x\to\pm 0} (\Delta x)^n \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Очевидно, что данный предел существует и равен нулю лишь при $n > 0$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в нуле при $n > 0$.

б) Для существования конечной производной у непрерывной в точке $x = 0$ функции $f(x)$ должно быть $f'_-(0) = f'_+(0)$. По определению

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{(\Delta x)^n \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} (\Delta x)^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Этот предел существует лишь при $n > 1$ и равен нулю. Итак, функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке $x = 0$ при $n > 1$.

в) Найдём $f'(x)$ при $x \neq 0$:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cdot \cos \frac{1}{x}.$$

Для непрерывности $f'(x)$ в точке $x = 0 \Leftrightarrow f'(-0) = f'(+0) = f'(0)$. Очевидно, что при $x \to \pm 0$ $f'(\pm 0)$ существуют только при $n - 2 > 0$ и равны нулю. С другой стороны, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^n \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$ при $n > 1$ ($\Rightarrow$ при $n > 2$). Поэтому $f'(x)$ непрерывна в 0 при $n > 2$.

13. По определению производной,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x - a) \cdot \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a)$$

(в силу непрерывности $\varphi(x)$ при $x = a$).

14. Покажем, что в точке $x = 0$ функция дифференцируема. Для этого достаточно доказать, что предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$ существует и равен нулю. Это следует из того, что $\left| \dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| \leq \left| \dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right| = |\Delta x| < \varepsilon$, как только $|\Delta x| < \delta = \varepsilon$.

Покажем теперь, что при $x \neq 0$ $f'(x)$ не существует. От противного, предположим, что $f'(x)$ существует. Но тогда $f(x)$ должна быть непрерывна при этом x, однако рассматриваемая функция разрывна в каждой такой точке. Полученное противоречие доказывает утверждение.

15. Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ (поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$ и $f(0)=0$), то по определению непрерывности в точке, функция $f(x)$ непрерывна в нуле. При этом односторонние производные

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right) =$$

$= \lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ не существуют.

16. а) Имеем $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода, т. к.

$$f(\pm 0) = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1.$$

По определению обобщённой производной,

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}}{\Delta x}\mp 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}\mp\Delta x}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}-|\Delta x|}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|} = \pm\frac{1}{2}.$$

б) Имеем $x_0 = 0$ – точка разрыва 1-го рода, т. к. $f(+0)=0$, $f(-0)=1$. Тогда

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x\to +0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}\right) = 0;$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x\to -0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}-1\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{|\Delta x|} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{|\Delta x|}}}} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{|\Delta x|} \left(1 - \frac{e^{\frac{1}{|\Delta x|}}}{1 + e^{\frac{1}{|\Delta x|}}} \right) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{|\Delta x|}}} = 0$$

(здесь использовался предел $\lim\limits_{y \to \pm\infty} (y \cdot e^{-|y|}) = 0$).

17. Запишем условие непрерывности:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; x_0^2 = ax_0 + b. \qquad (1)$$

Добавим условие дифференцируемости в этой точке: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Найдем, по определению, односторонние производные:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0,$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a.$$

Итак, условие дифференцируемости: $2x_0 = a$. (2)

Решая систему (1)–(2), находим $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

18. а) Да. В самом деле,

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Этот пример не существует, т. к. по условию $g(x)$ не имеет производной в точке $x = 0$ (не существует предел второй из дробей).

б) Вообще говоря, нет, т. к. если $\psi(x)$ не имеет производной, а $\varphi(x)$ имеет производную, то за $f(x)$ можно принять $\psi(x)$, а за $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Тогда $F(x) = \psi(x) + (\varphi(x) - \psi(x)) \equiv \varphi(x)$ будет иметь производную. Примеры из условия рассмотрите самостоятельно.

19. а) Вообще говоря, нет. По определению производной имеем:

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

(добавляя в числителе дроби $\pm(f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)))$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Отсюда, в частности, следует, что если функция $g(x)$ определена в окрестности $|x - x_0| < \delta$, $f(x_0) = 0$, $\left|\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right| \leqslant M$, то $F'(x_0)$ существует. Например, если $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, то $F'(0) = 0$.

б) Как и в случае а), получим для производной $F'(x_0)$ такое же выражение. Эта производная может существовать, например, тогда, когда обе функции непрерывны и $g(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, $\left|\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right| \leqslant M$. Например, если $f(x) \equiv g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, то $F'(0) = 0$.

20. а) По определению производной,

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = 0$, а

$$\left| \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right| \leq M,$$

то $F'(x_0)$ существует и равна 0. Например, $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, тогда $f(g(x)) = |x|^2$ – дифференцируема, $F'(0) = 0$.

б) Аналогично предыдущему, если потребовать, чтобы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = 0$, а

$$\left| \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \right| \leq M,$$

то $F'(x_0)$ существует и равна 0. Например, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

в) $\chi(\chi(x)) \equiv 1$ – дифференцируемая функция, хотя функция Дирихле не дифференцируема ни в одной точке.

21. Вообще говоря, нет. В предложенном примере $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty$ при $x \to 0$. (Точка $x = 0$ – точка перегиба графика функции). Здесь $f'(0)$ бесконечна, но при этом $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 \neq \infty$.

22. Вообще говоря, нет: из неравенства $f_1(x) \geq f_2(x)$ не следует неравенство $f_1'(x) \geq f_2'(x)$. Например, $f_1(x) \equiv 4$, $f_2(x) = x^2$, $x \in [1, 2]$. На этом отрезке $f_1(x) \equiv 4 \geq x^2 = f_2(x)$, но $f_1'(x) \equiv 0 < 2x = f_2'(x)$. Или $f_1(x) \equiv 4 > f_2(x) \equiv 1$, но $f_1'(x) \equiv 0 \equiv f_2'(x)$.

23. Пусть при всех допустимых x $f(-x) = f(x)$, тогда

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{-\Delta x\to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x).$$

В случае нечётной функции доказывается аналогично.

24. В силу периодичности имеем $f(x+T) = f(x)$ при всех $x \in X$. Продифференцировав это равенство по переменной x, получаем $f'(x) = f'(x+T)$, т. е. $f'(x)$ – периодическая функция с тем же периодом $T > 0$.

25. 1) Производная в точке $x = 0$ существует и равна нулю:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = 0.$$

2) При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. При $x \to 0$ первое слагаемое стремится к нулю, а предел второго не существует, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

26. 1) Придадим в точке $x = 1$ аргументу функции f приращение Δx и найдём соответствующее приращение функции:

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = ((1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1) - 0 =$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Отсюда видно, что $df(1) = \Delta x$ (главная часть приращения при $\Delta x \to 0$, линейная относительно Δx).

2) Выше мы нашли значение дифференциала в точке $x = 1$, действуя по определению дифференциала 1-го порядка. Можно было поступить иначе, а именно воспользоваться стандартной формулой для 1-го дифференциала:

$$df(x) = (x^3 - 2x + 1)' dx = (3x^2 - 2)dx \Big|_{x=1} = dx.$$

2 СЕМИНАР: Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Производная обратной функции

«Глупость – это не отсутствие ума. Это такой ум».
Александр Иванович Лебедь (1950—2002)
— российский политический и военный деятель.

Выше мы рассмотрели важный случай *явного задания* функции одной действительной переменной, т. е. когда функция задана уравнением, разрешённым относительно переменной y: $y = f(x)$, $x \in X$. В общем случае функция может быть также задана в декартовой системе координат параметрически или неявно. Обратимся к этим случаям, выясним, при каких условиях в подобной ситуации функция будет дифференцируемой и как найти производную функции и её дифференциал.

2.1 Производная параметрически заданной функции

Понятие параметрически заданной функции одной действительной переменной. Параметрическое задание функции – обобщение явного способа задания функции одной переменной и один из основных способов для определения такого типа функций.

Говорят, что однозначная функция $y = f(x)$ задана *параметрически*, если:

1) на некотором множестве $T \subseteq \mathbb{R}$ определены две функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T, \end{cases}$$

где t называется *параметром*;

2) если обозначить X – множество значений функции $x(t)$, то на нём определена обратная функция $t = t^{-1}(x)$.

Тогда, подставляя $t = t^{-1}(x)$ во второе уравнение системы, для любого $x \in X$ получим функцию $y = y(t^{-1}(x)) \quad (= f(x))$. При этом областью определения функции $f(x)$ является множество значений функции $x(t)$, а множеством значений функции $f(x)$ является множество значений функции $y(t)$.

Когда параметр t пробегает всё множество T, точка с координатами $(x(t), y(t))$ описывает на плоскости Oxy множество точек, которое является графиком данной функции $y = f(x)$.

Если обе функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на множестве T, и при этом функция $x(t)$ строго монотонна на T, то такая система описывает на плоскости некоторую непрерывную плоскую кривую, являющуюся графиком однозначной непрерывной функции. Если убрать требование монотонности для $x(t)$, оставив условие непрерывности $x(t)$ и $y(t)$, то получим плоскую непрерывную кривую, заданную параметрически, и в этом случае совсем не обязательно каждому значению x будет соответствовать единственное значение y.

Любую функция, заданную явно уравнением $y = f(x)$, $x \in X$, можно задать параметрически системой уравнений

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = f(t), \quad t \in X. \end{cases}$$

В этом смысле явное определение функции можно рассматривать как частный случай параметрического задания функции.

Пример 9. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$, где $x \in [-1, 1]$, может быть задана параметрически (параметризована) системой уравнений

$$x = \cos t, \;\; y = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, \pi]. \;\; \square$$

Пример 10. Плоская кривая, заданная неявным уравнением $x^2 + y^2 = 1$, параметризуется системой уравнений

$$x = \cos t, \, y = \sin t, \quad \text{где } t \in [0, 2\pi].$$

Это окружность и она не является однозначной функцией. □

Для функций, определяемых параметрически, также бывает необходимо найти производную y по x. Рассмотрим, как это делается.

T1 (*о производной параметрически заданной функции*). Если функция $y = y(x)$ задана параметрически системой уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, причём функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y(x)$ также дифференцируема в точке $x_0 = x(t_0)$ и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ или (в дифференциальной форме) } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

где производная y'_x вычисляется в точке $x_0 = x(t_0)$, а производные y'_t, x'_t – в соответствующей точке t_0.

Замечание 1. Фактически при переходе от $\dfrac{dy}{dx}$ к $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ формальным «делением» числителя и знаменателя дроби на dt, в числителе и знаменатели образуются производные y'_t и x'_t и осуществляется переход от оператора дифференцирования по переменной x к операторам дифференцирования по переменной t.

Замечание 2. При параметрическом задании функции производная y'_x в общем случае оказывается зависящей от параметра t, а не от x, что может, особенно вначале, показаться несколько непривычным, но это нормальная ситуация.

Пример 11. [6, №1040] Найти производную y'_x и указать, при каких x она существует, если:

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Решение. Область определения функции $y(x)$ совпадает с областью значений функции $x = \sin^2 t$ и является сегментом $x \in [0, 1]$. Найдём производную.

1-й способ. Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2\cos t \cdot (-\sin t)}{2\sin t \cdot \cos t} = -1$, где $\sin 2t \neq 0$ $\Leftrightarrow t \neq \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$, поэтому $x \in (0, 1)$.

2-й способ. Сложив уравнения, получим $x+y = 1$, откуда $y = 1-x$. Тогда $y'_x = (1-x)'_x = -1$.

Ответ: $y'_x = -1$ при $x \in (0, 1)$.

2.2 Производная и дифференциал неявно заданной функции

«Математику на 12 баллов знает один господь бог, я её знаю на 10 баллов, а вы все – на нуль».

М. В. Остроградский (1801–1861) – математик и механик, автор метода Остроградского в теории интегралов.

Рассмотрим уравнение с двумя переменными:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если можно выразить переменную y их данного уравнения через переменную x, приведя его к виду $y = y(x)$, то говорят, что функция задана *явно*. В противном случае говорят, что уравнение (1) задаёт функцию y от x *неявным образом*.

Пример 12. Например, уравнение $y^3 + 3y = x$ неявным образом задаёт функцию $y(x)$. □

T2 (*о производной и дифференциале функции, заданной неявно*). Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то:

1) производная этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}(F(x, y)) = 0,$$

полученного дифференцированием по переменной x неявного уравнения (1), где функция $F(x, y(x))$ рассматривается как сложная (дифференцируемая) функция переменной x;

2) дифференциал неявной функции находится дифференцированием уравнения (1) (в смысле взятия дифференциала от левой и правой частей неявного уравнения):

$$d(F(x, y)) = 0,$$

из которого затем выражается dy.

Замечание. При неявном задании функции производная y'_x и дифференциал dy в общем случае оказываются зависящими сразу от двух переменных x и y.

Пример 13. Найти производную и дифференциал функции $y(x)$, заданной уравнением

$$2(x+y) - \ln y + 3 = 0.$$

Решение. 1) Найдём производную y', для этого продифференцируем (возьмём производную) уравнение по переменной x:

$$2(1+y') - \frac{y'}{y} = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{2y}{1-2y} \ \ (y \neq \frac{1}{2}).$$

2) Найдём дифференциал dy, для чего возьмём дифференциал от обеих частей уравнения:

$$d(2(x+y) - \ln y + 3) = d(0) \ \Leftrightarrow \ 2dx + 2dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 2dx + \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy = 0 \ \Leftrightarrow \ dy = \frac{2y}{1-2y} dx.$$

Замечание. Если производная y' предварительно уже была вычислена, то при нахождении дифференциала проще было воспользоваться формулой $dy = y'dx$. $\square$

2.3 Производная обратной функции

Представим себе ситуацию, когда необходимо вычислить производную обратной функции в ситуации, когда саму обратную функцию найти аналитически затруднительно или не представляется возможным. Как поступить? Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

Т3 (*производная обратной функции; формулировка в точке*). Пусть функция $y = y(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0; пусть существует $y'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = y(x_0)$ определена обратная функция $x = x^{-1}(y)$, причём она дифференцируема в точке y_0 и

$$\left(x^{-1}(y)\right)'\Big|_{y_0} = \frac{1}{y'(x_0)},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

где производные берутся в соответствующих точках.

Т4 (*производная обратной функции в формулировке для интервала*). Пусть функция $y = y(x)$ определена, непрерывна и строго монотонно возрастает (убывает) на интервале (a, b). Тогда в соответствующем интервале (A, B), где $A = \lim\limits_{x \to a+0} y(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b-0} y(x)$, существует однозначная обратная функция $x = x^{-1}(y)$, также непрерывная и строго монотонно возрастающая (убывающая) на этом интервале. Производная обратной функции в каждой точке интервала (A, B) находится по той же формуле, что и в предыдущей формулировке теоремы.

Пример 14. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \arcsin x,\ x \in (-1, 1); \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Решение. а) Обратной функцией к арксинусу является функция $x = \sin y$. Далее воспользуемся формулой $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$, связывающей производные взаимно обратных функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

б) Аналогично имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}. \ \square$$

2.4 Задачи

Решить задачи на нахождение производных функций, заданных параметрически:

№27. [6, № 1046] Найти производную y'_x там, где она существует, если

$$x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

№28. Найти y'_x, если $x = e^t \cdot \cos t$, $y = e^t \cdot \sin t$, где t – независимая переменная.

№29. [6, № 780] Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \operatorname{arcctg} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В какой области определена эта функция?

№30. [6, № 1077(а,б)] Написать уравнения касательной и нормали[1] к кривой

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

№31. [6, № 1078(а,б,в)] Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = \infty$.

Решить задачи на нахождение производных неявно заданных функций:

№32. [6, № 1048] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

[1] *Нормалью* к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная касательной в этой точке.

Чему равна y'_x при $x = 2$ и $y = 4$, и при $x = 2$ и $y = 0$?

№33. [6, № 1049] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$y^2 = 2px \quad (\textit{парабола}).$$

№34. [6, № 1050] Найти производную y'_x функции, заданной в неявном виде (не приводя к явному виду):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{эллипс}).$$

№35. Найти $y'(x)$ и dy, если $y + \ln y + x^3 = 0$.

№36. Найти дифференциал и производную первого порядка неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$x^4 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0.$$

№37. [6, № 1061] Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad x = y^2\,?$$

№38. [6, № 1081] Написать уравнения касательной и нормали в точке $M(6;\, 6,4)$ к кривой

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

№39. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$x^2 y + e^{xy^2} - y = 0$$

в точке $P(0, 1)$.

Решить задачи на нахождение обратных функций и их производных:

№40. Найти функцию, обратную к функции

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

№41. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c, d $(c \neq 0)$, чтобы дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ совпадала со своей обратной? Привести пример.

№42. Найти функцию, обратную к функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

№43. [6, № 760] Найти обратную функцию $x = x(y)$, если

$$y = x + [x].$$

№44. [6, № 774] Доказать тождество:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

№45. Найти x'_y, если $y = xe^x$, $x > 0$.

№46. [6, № 763] Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ – рационально;} \\ -x, & \text{если } x \text{ – иррационально.} \end{cases}$$

№47. [6, № 764] В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная к ней функция $y = f^{-1}(x)$ представляют одну и ту же функцию?

№48. [6, № 772] Определить однозначные непрерывные ветви обратной функции для функции $y = \operatorname{tg} x$.

2.5 Ответы и решения

27. Так как $y'_t = \dfrac{t}{|t|(1+t^2)}$, $x'_t = \dfrac{1}{1+t^2}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t}{|t|} = \operatorname{sgn} t$, $t \neq 0$.

28. При $x'_t \neq 0$ имеем: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right).$$

29. Функции $\operatorname{arctg} t$ и $\operatorname{arcctg} t$ определены и непрерывны на всей оси, причём $\operatorname{arctg} t$ – строго монотонна (возрастает). Поэтому данная система определяет y как непрерывную функцию от x. При этом область определения функции $y(x)$ совпадает с областью значений функции $x = \operatorname{arctg} t$ и является интервалом $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Найдём $y(x)$.

1-й способ. Выразим из 1-го уравнения $t = \operatorname{tg} x$ и подставим во 2-е уравнение: $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Здесь мы воспользовались тождеством $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in (0, \pi)$.

2-й способ. Сложим оба уравнения системы и воспользуемся тождеством $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arcctg} t = \frac{\pi}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$. Получим $x + y = \frac{\pi}{2}$, откуда получаем $y = \frac{\pi}{2} - x$, где $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

30. Уравнение касательной в точке $(x_0, y(x_0))$ к графику функции $y = y(x)$:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение нормали:

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

а) Найдём $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t}$ $\Rightarrow y'_x\Big|_{t=0} = \dfrac{3}{2}$.

Уравнение касательной: $y = 0 + \dfrac{3}{2}(x-0) = \dfrac{3}{2}x$, т. е. $3x - 2y = 0$.

Уравнение нормали: $y = 0 - \dfrac{2}{3}(x - 0) = -\dfrac{2}{3}x$, т. е. $2x + 3y = 0$.

б) При $t = 1$ производная $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3 - 3t^2}{2 - 2t}$ не существует, однако существует конечный предел

$$\lim_{t\to 1} \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \lim_{t\to 1} \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)} = \lim_{t\to 1} \frac{3(1+t)}{2} = 3.$$

То есть для производной $t = 1$ есть точка устранимого разрыва. В этой точке кривая имеет точку возврата, в которой «сходятся» две ветви. Если доопределить производную в этой точке её предельным значением, равным 3, то получим, что обе ветви кривой имеют в точке $t = 1$ общую одностороннюю касательную. Найдём её уравнение:

$$y = y(1) + y'_x(1)(x - x_0) = 2 + 3(x - 1), \quad \text{или } y = 3x - 1.$$

Тогда уравнение нормали в точке $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$y = 2 - \tfrac{1}{3}(x - 1) = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3}.$$

31. Уравнение касательной:

$$y = y(t_0) + \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}(x - x(t_0) = y(t_0) + \frac{t^4 - 4t^3 - 2t + 2}{-t^4 - 4t^3 + 2t + 2}(x - x(t_0)).$$

а) $t = 0$: $y(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y'_x(0) = 1 \Rightarrow$ касательная: $y = x$, нормаль: $y = -x$;

б) $t = 1$: $y(1) = \frac{1}{2}$, $x(1) = \frac{3}{2}$, $y'_x(1) = 3 \Rightarrow$ касательная: $3x - y - 4 = 0$, нормаль: $x + 3y - 3 = 0$;

в) $t = \infty$: $y(\infty) = 0$, $x(\infty) = 0$, $y'_x(\infty) = -1 \Rightarrow$ касательная: $y = -x$, нормаль: $y = x$.

32. Продифференцируем уравнение по переменной x:

$$2x + 2(y + xy') - 2y \cdot y' = 2 \;\Leftrightarrow\; y'(x - y) = 1 - x - y,$$

т. е. $y' = \dfrac{x + y - 1}{y - x}$ $(x \neq y)$. Если $x = 2$, $y = 4$, то $y' = \dfrac{5}{2}$. Если $x = 2$, $y = 0$, то $y' = -\dfrac{1}{2}$.

33. Продифференцируем уравнение по переменной x, принимая во внимание, что x – независимая переменная, а y – функция от x:

$$2y \cdot y' = 2p, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{p}{y}, \text{ где } y \neq 0.$$

34. Продифференцируем уравнение по переменной x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ где } y \neq 0.$$

35. Продифференцируем уравнение один раз:

$$y' + \frac{y'}{y} + 3x^2 = 0 \quad (\Rightarrow\ y' = -\frac{3x^2 y}{y+1}).$$

Теперь для нахождения дифференциала dy (x – независимая переменная) воспользуемся формулой $dy = y'dx = -\dfrac{3x^2y}{y+1}dx$.

36. Возьмём дифференциал: $d(x^4 - 2x + 3y^2 + xy - 1) = d(0)$ $\Leftrightarrow$ $4x^3dx - 2dx + 6ydy + xdy + ydx = 0 \Leftrightarrow (6y + x)dy = (-4x^3 + 2 - y)dx$, тогда при условии $6y + x \neq 0$ получаем $dy = \dfrac{-4x^3 + 2 - y}{6y + x}dx$. Производная – это коэффициент при dx, т. е. $y' = \dfrac{-4x^3 + 2 - y}{6y + x}$. Здесь имеется и другой способ решения, но он становится ясен после знакомства с дифференцируемыми функциями двух переменных.

37. Сделайте рисунок. На рисунке видны две точки пересечения кривых: $(0, 0)$ и $(1, 1)$. 1) Очевидно, что в точке $(0, 0)$ кривые пересекаются под прямым углом ($\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$).

2) В точке $(1, 1)$ определим искомый угол φ_2 как угол между касательными к этим кривым в данной точке. Уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x = 1$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$

Для нахождения уравнения касательной к кривой $x = y^2$ в точке $x = 1$ найдём производную: $1 = 2y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

Тогда получаем уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между двумя пересекающими прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2}\cdot 2}\right| = \frac{3}{4}$$

(модуль поставлен для нахождения тангенса острого угла между прямыми). Следовательно, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

38. Вычислим производную:

$$\frac{2x}{100} + \frac{2y\cdot y'}{64} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{16x}{25y} \quad \Rightarrow \quad y'(M) = -0,6.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = 6,4 - 0,6(x-6)$ $\Leftrightarrow y = -0,6x + 10$, или $3x + 5y - 50 = 0$.

Уравнение нормали: $y = 6,4 + \frac{1}{6,4}(x-6) \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - 3,6$, или $5x - 3y - 10,8 = 0$.

39. Уравнение касательной имеет вид: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, где $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Найдём производную $y'(x_0)$. Продифференцировав уравнение по x, находим

$$2xy + x^2y' + e^{xy^2}(y^2 + 2xy\cdot y') - y' = 0,$$

откуда $(x^2 + 2xye^{xy^2} - 1)y' = -2xy - y^2e^{xy^2}$ и при условии $x^2 + 2xye^{xy^2} - 1 \neq 0$ получаем

$$y' = \left.\frac{-2xy - y^2e^{xy^2}}{x^2 + 2xye^{xy^2} - 1}\right|_{(0,1)} = 1.$$

Поэтому уравнение касательной в точке $P(0,1)$ принимает окончательный вид $y = 1 + (x - 0) = 1 + x$.

Уравнение нормали: $y = y(x_0) - \dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) = 1 - 1(x - 0) = 1 - x$.

40. Функция $y = \operatorname{sh} x$ монотонно возрастает ($y' = \operatorname{ch} x > 0$), поэтому существует обратная функция $y = \operatorname{Arsh} x$ (ареасинус). Найдём её. Обозначим $e^x = z > 0$, тогда $2y = z - \frac{1}{z}$ $\Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0$. Дискриминант $D = 4(y^2 + 1)$, корни $z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Так как $y - \sqrt{y^2+1} < 0$, то $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ $\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Ответ: $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

41. Найдём обратную функцию: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$, т. е. обратная функция $y = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$. По условию, при $x \neq a/c; -d/c$ имеем

$$\frac{ax+b}{cx+d} \equiv \frac{-dx+b}{cx-a} \ \Leftrightarrow\ (ax+b)(cx-a) \equiv (cx+d)(b-dx).$$

Найдём соотношения между коэффициентами методом неопределённых коэффициентов:

$$acx^2 + (bc-a^2)x - ab \equiv -cdx^2 + (bc-d^2)x + bd,$$

что верно сразу при всех допустимых x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} ac = -cd, \\ bc - a^2 = bc - d^2, \\ -ab = bd, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -d, \\ a^2 = d^2, \\ -ab = bd, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = -d.$$

42. 1) $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$: $y = \sin x \Rightarrow \arcsin y = \arcsin(\sin x)$. В силу периодичности синуса имеем $\arcsin y = \arcsin(\sin(x - \pi n))$. Для упрощения этого равенства воспользуемся тождеством $\arcsin(\sin(\alpha)) = \alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Так как на рассматриваемом отрезке $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x - \pi n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin(x - \pi n)) = x - \pi n$ и получаем: $\arcsin y = x - \pi n$, откуда $x = \arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Переобозначив x на y, а y на x, имеем обратную функцию: $y = \arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $n = 2k + 1$: $\arcsin y = \arcsin(\sin(\pi n - x))$. Так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi n - x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin(x - \pi n)) = \pi n - x$ и получаем: $\arcsin y = \pi n - x$, откуда $x = -\arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или, заменив x на y, а y на x, имеем обратную функцию:

$y = -\arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ответ можно записать в единой форме: $y = (-1)^n \arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

43. На каждом из полуинтервалов $n \leqslant x < n+1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) функция $y(x)$ непрерывна и строго монотонна, поэтому у неё существует обратная функция. Найдём её. Так как при $n \leqslant x < n+1$ имеем $[x] = n$, то $y = x + n$, откуда $x = y - n$, где $n \leqslant y - n < n+1$, т. е. $2n \leqslant y < 2n+1$.

Ответ: $x = y - n$, где $2n \leqslant y < 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

44. Перепишем тождество в виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \tag{1}$$

Оценим значения левой и правой частей этого равенства: $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arccos x \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Так как на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функция синус строго монотонна (возрастает), то применяя эту функцию к равенству (1), получаем равносильное равенство, верное при всех $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Leftrightarrow x = \cos(\arccos x) \Leftrightarrow x = x.$$

45. По теореме о производной обратной функции имеем:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(xe^x)'_x} = \frac{1}{e^x(x+1)}.$$

46. Может, если уравнение $y = f(x)$ при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение. Предложенная функция именно такая (она осуществляет взаимно однозначное отображение своей области определения на своё множество значений). Поэтому она обратима, найдём обратную к ней функцию. Для этого выразим x через y:

$$x = \begin{cases} y, & \text{если } y \text{ – рационально;} \\ -y, & \text{если } y \text{ – иррационально.} \end{cases}$$

Видно, что если поменять местами x и y, то полученная обратная функция совпадает с исходной.

47. По условию, выполняется тождество $f(x) \equiv f^{-1}(x)$, где $E_f = D_f$. Если к этому тождеству применить функцию

f, то получим, что при всех $x \in D_f$ выполняется тождество $f(f(x)) = x$ (с другой стороны, можно было к исходному тождеству применить функцию f^{-1} и получить, что $\forall\, x \in E_f$ выполняется тождество $x = f^{-1}(f^{-1}(x))$).

Полученному условию в виде тождества $f(f(x)) = x$, например, удовлетворяет функция $y = x$ $(x \in \mathbb{R})$, а также любая функция, график которой симметричен относительно прямой $y = x$. Ещё пример – дробно-линейная функция $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$.

48. График этой периодической функции состоит из бесконечного числа одинаковых повторяющихся ветвей тангенсоиды. Рассмотрим интервал $(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k)$ $(k \in \mathbb{Z})$, на котором определена k-я ветвь. Уравнение этой ветви $y = \operatorname{tg}(x-\pi k)$. Это непрерывная, строго возрастающая функция, следовательно, у неё существует обратная функция $x = x(y)$. Найдём её. Применяя арктангенс к обеим частям равенства $y = \operatorname{tg}(x - \pi k)$, получаем, что $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x - \pi k))$. Для упрощения правой части полученного равенства воспользуемся тождеством $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. С учётом $x - \pi k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, получаем $\operatorname{arctg} y = x - \pi k$, откуда выражаем переменную x. Таким образом, нашли обратную к данной ветви функцию: $x = \operatorname{arctg} y + \pi k$, где $y \in \mathbb{R}$.

3 СЕМИНАР: Производные и дифференциалы высших порядков

«Не спеши́, а то успе́ешь».
Александр Иванович Лебедь (1950—2002) — российский политический и военный деятель.

3.1 Производные высших порядков функций, заданных явно

Понятие производной n-го порядка. Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в некотором интервале (a, b), то может случиться, что эта функция $f'(x)$ тоже имеет конечную производную в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Её называют *производной второго порядка*, или второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}, \ y''(x_0), \ f''(x_0).$$

Её производная, если она существует хотя бы в одной точке, называется *производной 3-го порядка* и т. д. Так по аналогии можно определить *производную n-го порядка*, которую, соответственно, обозначают

$$\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0}, \ y^{(n)}(x_0), \ f^{(n)}(x_0).$$

Таким образом, по определению

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, ...$$

Если необходимо указать переменную, по которой берётся производная, то пишут

$$y''_{xx} \ \text{или} \ f''_{x^2}, \quad y^{(n)}_{x^n},$$

хотя для функций одной переменной это и так очевидно. Так же вводятся понятия односторонних производных любого порядка.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), то кратко пишут $f(x) \in C^n(a, b)$. В частности, если функция имеет непрерывные производные всех порядков, то это обозначают $f(x) \in C^\infty(a, b)$.

Производные высших порядков основных элементарных функций. Ниже приведены производные высших порядков некоторых элементарных функций:[1]

1. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $a > 0$, в частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$;

2. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $x > 0$;

3. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}$, $n = 0, 1, \ldots$, $m \in \mathbb{R}$;

в частности, при $m = -1$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}; \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}};$$

4. $((a+bx)^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)b^n(a+bx)^{m-n}$, $m \in \mathbb{R}$;

5. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$;

6. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$;

7. $(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если } x = 2k, \\ \operatorname{ch} x, & \text{если } x = 2k+1; \end{cases}$

$(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{если } x = 2k, \\ \operatorname{sh} x, & \text{если } x = 2k+1. \end{cases}$

Пример 15. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение. Разложим функцию в сумму простых дробей:

$$y = \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{(a+x) + (a-x)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

[1]Доказываются математической индукцией, проведённой по порядку производной.

Тогда, дифференцируя n раз, получаем:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right). \square$$

Для нахождения высших производных от функций $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$, $\cos^3 x$ и др. можно использовать формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x), \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$

Пример 16. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = \sin^2 x$.

Решение. $(\sin^2 x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^{(n)} = -\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)} =$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right). \ \square$$

3.2 Дифференциалы высших порядков функций, заданных явно

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x. Определим дифференциал n-го порядка функции $f(x)$ в этой точке рекуррентно как дифференциал, взятый от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)), \quad n = 2, 3, ...$$

При этом дифференциал рассматривается как функция от x, а приращение dx при последовательном использовании формулы $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$ считается постоянным и остаётся одним и тем же при переходе от дифференциала к следующему (по порядку) дифференциалу.

Итак, в общем случае, когда x – дифференцируемая соответствующее число раз функция, дифференциалы второго и более высокого порядка можно вычислять последовательно, используя приведённое выше рекуррентное определение дифференциала (как дифференциала от дифференциала предыдущего порядка) и формулу дифференциала сложной функции, например:

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$
$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x,$$
$$d^3f = d(d^2f) = d(f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x) = ...$$

Наряду с этим, справедлива следующая формула для вычисления дифференциалов высших порядков, связывающая дифференциал в точке с производной того же порядка:

$$d^nf = f^{(n)}(x)\Delta x^n.$$

Замечание 1. Формула $d^ny = f^{(n)}(x)\Delta x^n$ верна как в случае, когда x – независимая переменная, и тогда принимает вид[1]

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

так и в случае, когда $x(t)$ – функция. Но в последнем случае формула имеет небольшую практическую ценность, так как при вычислении дифференциалов сложных функций $f(x(t))$ обычно интерес представляет дифференциал, отвечающий приращению не промежуточной переменной x, а приращению конечной (внутренней) переменной t (см. о дифференциалах сложной функции).

Замечание 2. Если x – независимая переменная, то

$$d^2x = d^3x = ... = 0.$$

Пример 17. Найти дифференциалы функций (x – независимая переменная):

а) $d^2(3\sin x + x^4)$; б) $d^3(x^4)$.

Решение. По формуле $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$ имеем:

[1]Запись dx^n означает $(dx)^n$. Не путать с $d(x^n)$.

а) $d^2(3\sin x + x^4) = (3\sin x + x^4)'' dx^2 = (-3\sin x + 12x^2)dx^2$;

б) $d^3(x^4) = (x^4)^{(3)} dx^3 = 24x dx^3$.

Пример 18. Найти $d^2 f$, если $f(x) = x^3$, в двух случаях:
1) x – независимая переменная; 2) $x(t) = t^2$ – функция независимой переменной t.

Решение. 1) Имеем: $d^2 f = f''(x)dx^2 = 6x dx^2$.

2) Учитывая, что $f''(x) = 6x = 6t^2$, $f'(x) = 3x^2 = 3t^4$, $dx^2 = (2tdt)^2$, $d^2x = x''(t)dt^2 = 2dt^2$, получим

$$d^2 f = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x = 6t^2(2tdt)^2 + 3t^4 \cdot 2dt^2 =$$

$$= 24t^4dt^2 + 6t^4dt^2 = 30t^4dt^2.$$

Именно такой результат мы бы получили, если просто подставили в функцию $f(x) = x^3$ вместо x выражение t^2 и затем вычислили дифференциал получившейся функции $g(t) = t^6$:

$$d^2 f(x(t)) = d^2 g(t) = g''(t)dt^2 = 30t^4dt^2. \ \square$$

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков от суммы и произведения функций. Формула Лейбница.

«Если сложить тёмное прошлое со светлым будущим, получится серое настоящее.

Михаил Жванецкий (1934–2020) – русский писатель–сатирик.

Т1 (*линейность производной и дифференциала n-го порядка*). Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда их линейная комбинация $\alpha u + \beta v$ также n раз дифференцируема в точке x, причём

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha \cdot u^{(n)} + \beta \cdot v^{(n)},$$

$$d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot d^n u + \beta \cdot d^n v.$$

T2 (*формула Лéйбница*). Производная n-го порядка от произведения $y = u(x)v(x)$ двух n раз дифференцируемых функций вычисляется по формуле:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k $(k = 0, 1, ..., n)$, а под производными нулевого порядка понимаются сами функции: $u^{(0)} = u(x)$, $v^{(0)} = v(x)$.

Следствие. Принимая во внимание соотношение между дифференциалом и производной того же порядка $(d^n y = y^{(n)}(x)dx^n)$, получаем аналогичную формулу для дифференциалов произвольных порядков:

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)} dx^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p u^{(n-p)} \cdot v^{(p)} dx^n,$$

где под дифференциалами нулевого порядка понимаются сами функции: $d^0 u = u(x)$, $d^0 v = v(x)$.

Замечание 1. Формулу Лейбница в дифференциальной форме можно записать также в виде

$$d^n(uv) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p d^{n-p} u \cdot d^p v.$$

Замечание 2. В формуле Лейбница x – независимая переменная.

Формула Лейбница особенно эффективна, когда одна из функций имеет только конечное число ненулевых производных, т. е. когда $u(x)$ или $v(x)$ – многочлен.

Пример 19. [6, № 1161] Найти $y^{(20)}(x)$ и $d^{20}y(x)$, если $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

Решение. Положим $u = x^2$, $v = e^{2x}$, тогда $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = ... = u^{(20)} = 0$, $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 2^2 e^{2x}$,..., $v^{(20)} = 2^{20} e^{2x}$. Вычислив коэффициенты $C_{20}^0 = 1$, $C_{20}^1 = 20$, $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190$, подставим в формулу Лейбница:

$$(x^2 e^{2x})^{(20)} = C_{20}^0 u^{(0)} v^{(20)} + C_{20}^1 u' v^{(19)} + C_{20}^2 u'' v^{(18)} =$$

$= x^2 \cdot 2^{20} \cdot e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19} \cdot e^{2x} + 190 \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).$

Тогда $d^{20} y(x) = (2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)) dx^{20}$. $\square$

3.4 Производные высших порядков функций, заданных параметрически

«В любом из нас спит гений. И с каждым днём все крепче...
Михаил Жванецкий (1934–2020) –
русский писатель–сатирик.

Выше мы говорили, что если функция задана параметрически, то её первая производная находится по правилу: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Найдём выражение для производной 2-го порядка:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,(y'_x)}{dx} =$$

(разделив числитель и знаменатель на dt, перейдём к операторам дифференцирования по переменной t)

$$= \frac{d\,(y'_x)\,/dt}{dx/dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

где $x'_t \neq 0$. Аналогично выводятся выражения для производных более высоких порядков:

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ \ldots, \quad y^{(n)}_{x^n} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

Пример 20. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение. Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$. Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \ \square$$

3.5 Производные и дифференциалы высших порядков функций, заданных неявно

Производные высших порядков. Пусть функция $y(x)$ задана неявным образом уравнением

$$F(x, y(x)) = 0, \tag{1}$$

где функция F определена и дифференцируема достаточное количество раз на интервале (a, b).

Мы уже знаем, что для вычисления первой производной необходимо один раз продифференцировать уравнение (1) по переменной x

$$(F(x, y(x)))'_x = 0 \tag{2}$$

и затем выразить из него искомую производную $y'(x)$ (через x и y). Для нахождения второй производной $y''(x)$ надо продифференцировать уравнение (2)

$$(F(x, y(x)))''_{xx} = 0$$

и из полученного равенства выразить $y''(x)$ (через $y'(x)$, x и y).

Аналогично, производные $y^{(3)}_{x^3}$, $y^{(4)}_{x^4}$ и более высоких порядков находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения соответствующее число раз.

Пример 21. Найти $y''(x)$, если $y + \ln y + x^3 = 0$.

Решение. Дифференцируя при $y > 0$ один раз, получаем

$$y' + \frac{y'}{y} + 3x^2 = 0 \quad \left(\Rightarrow \quad y' = -\frac{3x^2 y}{y+1} \right).$$

Продифференцируем ещё раз:

$$y'' + \frac{y''y - (y')^2}{y^2} + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y''y^2 + y''y - (y')^2 + 6xy^2 = 0,$$

$$y''(y^2 + y) = (y')^2 - 6xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = \frac{(y')^2 - 6xy^2}{y^2 + y}.$$

Мы нашли производную и она зависит не только от x и y, но и от y'. Можно пойти дальше и подставить вместо y' её выражение, найденное выше. После упрощений получим

$$y'' = 3xy \cdot \frac{3x^3 - 2y^2 - 4y - 2}{(y+1)^3}. \ \square$$

Дифференциалы высших порядков. При последовательном вычислении дифференциалов высших порядков важно помнить, что dx есть произвольное и независящее от x число,[1] которое при дифференцировании по x следует рассматривать как постоянный множитель.

Пример 22. Найти d^2y в произвольной точке (x, y) и в точке $M(-1, 1)$, если

$$y + \ln y + x^3 = 0.$$

Решение. Возьмём дифференциал от обеих частей уравнения:

$$d(y + \ln y + x^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy + \frac{dy}{y} + 3x^2dx = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$ydy + dy + 3x^2ydx = 0 \quad \left(\Rightarrow \quad dy = -\frac{3x^2y}{y+1}dx\right).$$

Второй раз возьмём дифференциал:

$$d(ydy + dy + 3x^2ydx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(ydy) + d^2y + 3dx \cdot d(x^2y) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$dy^2 + yd^2y + d^2y + 3dx(d(x^2)y + x^2dy) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y+1)d^2y = -dy^2 - 3(2xydx + x^2dy)dx.$$

Для приведения второго дифференциала к стандартному виду ($d^2y = y''dx^2$) разделим последнее равенство на $y + 1$ $(\neq 0)$ и подставим в правой части вместо dy его выражение, найденное выше. После упрощений получим

$$d^2y = 3xy \cdot \frac{3x^3 - 2y^2 - 4y - 2}{(y+1)^3}dx^2,$$

где коэффициент при dx^2 есть вторая производная y''. Тогда

$$d^2y(M) = \frac{33}{8}dx^2. \ \square$$

[1] Мы рассматриваем случай, когда x – независимая переменная.

3.6 Производные высших порядков обратных функций

Пусть функция $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, дифференцируема достаточное число раз и имеет обратную функцию $x = x(y)$. Тогда её производные x', x'', x''' и т. д. (если они существуют) находятся следующим образом:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dy} =$$

(умножив и разделив в знаменателе на dx, перейдём от оператора дифференцирования по переменной y к оператору дифференцирования по x)

$$= \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right) = \frac{1}{y'} \cdot \left(-\frac{1}{(y')^2} \cdot y''\right) = -\frac{y''}{(y')^3}$$

и т. д.

Пример 23. Найти x' и x'', если $y = x \cdot e^x$, $x > 0$.

Решение. По правилу дифференцирования обратной функции имеем:

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{(xe^x)'} = \frac{1}{e^x(x+1)};$$

$$x'' = -\frac{y''}{(y')^3} = -\frac{e^x(x+2)}{(e^x(x+1))^3} = -\frac{x+2}{e^{2x}(x+1)^3}. \quad \square$$

3.7 Задачи

Решить задачи на вычисление производных и дифференциалов высших порядков функций, заданных явно:

№49. [6, №1130] Найти d^2y для функции $y = e^x$ в двух случаях: а) x – независимая переменная; б) x – промежуточный аргумент (функция некоторой другой переменной).

Считая x независимой переменной, найти:

№50. [6, №1133] d^2y, если $y = x^x$;

№51. [6, №1165] $y^{(50)}$, если $y = x^2 \cdot \sin 2x$;

№52. [6, №1173] $d^{10}y$, если $y = x \cdot \cos 2x$;

№53. [6, №1175] d^6y, если $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$;

№54. [6, №1197] $y^{(n)}$, если $y = \sin(ax) \cdot \sin(bx)$;

№55. [6, №1198] $y^{(n)}$, если $y = \cos(ax) \cdot \cos(bx)$;

№56. [6, №1201] $y^{(n)}$, если $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

№57. [6, №1211] d^ny, если $y = x^n \cdot e^x$;

№58. [6, №1212] d^ny, если $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$.

№59. [6, №1226] Доказать, что многочлены Чебышёва

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos(m \arccos x), \quad (m \in \mathbb{N})$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) \cdot T_m''(x) - x \cdot T_m'(x) + m^2 \cdot T_m(x) = 0.$$

Решить задачи на вычисление производных и дифференциалов высших порядков функций, заданных параметрически:

№60. [6, №1143] Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$$

№61. [6, №1142] Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически (*циклоида*), если

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решить задачи на вычисление производных и дифференциалов высших порядков функций, заданных неявно:

№62. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

№63. Найти y'', если $y = e^y + 4x$.

3.8 Ответы и решения

49. Найдём вначале первый дифференциал: $dy = d(e^x) = e^x dx$. Теперь непосредственным дифференцированием найдём второй дифференциал: $d^2y = d(dy) = d(e^x dx)$. Применим далее правило дифференциала произведения: $= d(e^x)dx + e^x d(dx)$.

а) Так как x – независимая переменная, то её первый дифференциал – это приращение $dx = \Delta x$, которое не зависит от точки x, и поэтому $d(dx) = d^2x = 0$. Так как одно из слагаемых обнулилось, то остаётся упрощённая формула $d^2y = d(e^x)dx = (e^x)'(dx)^2 = e^x dx^2$.

б) Если же x – промежуточный аргумент, то, вообще говоря, $d^2x \neq 0$ и в выражении для второго дифференциала $d^2y = d(e^x)dx + e^x d(dx)$ остаются оба слагаемых, и тогда получаем: $d^2y = e^x dx^2 + e^x d^2x$.

50. Так как $y' = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$, то $dy = y'dx = x^x(\ln x + 1)dx$. Тогда $d^2y = (x^x(\ln x + 1))'dx^2 = (x^x(\ln x + 1)(\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x})dx^2 = x^x((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x})dx^2$.

51. По формуле Лейбница для производных высших порядков имеем

$$y^{(50)}(x) = \sum_{i=0}^{50} C_{50}^i (x^2)^{(i)} \cdot (\sin 2x)^{(50-i)} =$$

$$= C_{50}^0 \cdot x^2 \cdot 2^{50} \cdot \sin\left(2x + \frac{50\pi}{2}\right) + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cdot \sin\left(2x + \frac{49\pi}{2}\right) +$$

$$+ C_{50}^2 \cdot 2 \cdot 2^{48} \cdot \sin\left(2x + \frac{48\pi}{2}\right) =$$

$$= x^2 \cdot 2^{50}(-\sin 2x) + 50 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cdot \cos 2x + \frac{50!}{2! \cdot 48!} \cdot 2 \cdot 2^{48} \cdot \sin 2x =$$

$$= 2^{50}\left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x\right).$$

52. Имеем $d^{10}y(x) = y^{(10)}(x)dx^{10}$, по формуле Лейбница найдём производную 10–го порядка:

$$(x \cdot \cos 2x)^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \cdot (x)^{(i)} \cdot (\cos 2x)^{(10-i)} =$$

$$= C_{10}^0 \cdot (x)^{(0)} \cdot (\cos 2x)^{(10)} + C_{10}^1 \cdot x' \cdot (\cos 2x)^{(9)} =$$

(остальные слагаемые равны нулю, т. к. $x'' = x''' = ... = 0$, а $(\cos 2x)^{(i)} = 2^i \cdot \cos(2x + \frac{\pi i}{2})$)

$$= x \cdot 2^{10} \cdot \cos\left(2x + \frac{10\pi}{2}\right) + 10x' \cdot 2^9 \cdot \cos\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) =$$

$$= -x \cdot 2^{10} \cdot \cos 2x - 10 \cdot 2^9 \cdot \sin 2x = -2^{10}(x \cos 2x + 5 \sin 2x).$$

Тогда $d^{10}y(x) = -2^{10}(x \cos 2x + 5 \sin 2x)dx^{10}$.

53. Имеем $d^6 y = y^{(6)}(x)dx^6$, найдём $y^{(6)}(x)$ по формуле Лейбница:

$$y^{(6)}(x) = \sum_{i=0}^{6} C_6^i \cos\left(x + \frac{\pi i}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}^{(6-i)} x =$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{ch} x + 6(-\sin x) \operatorname{sh} x + 15(-\cos x) \operatorname{ch} x +$$

$$+20 \sin x \operatorname{sh} x + 15 \cos x \operatorname{ch} x + 6(-\sin) \operatorname{sh} x + (-\cos x) \operatorname{ch} x =$$

$= 8 \sin x \operatorname{sh} x$. Окончательно, $d^6 y = (8 \sin x \operatorname{sh} x)dx^6$.

54. По формуле произведения синусов имеем

$$y = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

тогда

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left((a-b)^n \cos\left((a-b)x + \frac{\pi n}{2}\right) - (a+b)^n \cos\left((a+b)x + \frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

55. По формуле произведения косинусов имеем

$$y = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x),$$

тогда

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left((a-b)^n \cos\left((a-b)x + \frac{\pi n}{2}\right) + (a+b)^n \cos\left((a+b)x + \frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

56. По формулам понижения степени имеем:

$$y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos^2 2x + 2) = \frac{1}{4}(1 + \cos 4x + 2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Тогда $y^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

57. Имеем

$$d^n y = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}(x^n) \cdot d^i e^x =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot n(n-1)...(n-(n-i)+1))x^{n-(n-i)} dx^{n-i} \cdot e^x dx^i =$$

$$= e^x dx^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot \frac{n!}{i!} \cdot x^i =$$

(так как $C_n^i = \dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$, то $\dfrac{n!}{i!} = C_n^i \cdot (n-i)!$)

$$= e^x \left(\sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 (n-i)! \cdot x^i\right) dx^n.$$

58. Представим функцию в виде $y = \ln x \cdot \dfrac{1}{x}$ и воспользуемся формулой Лейбница:

$$d^n y = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^i(\ln x) \cdot d^{n-i}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= C_n^0 d^0(\ln x) \cdot d^n\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{i=1}^{n} C_n^i d^i(\ln x) \cdot d^{n-i}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\left(\ln x \cdot \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i} \cdot \frac{(-1)^{n-i}(n-i)!}{x^{n-i+1}}\right) dx^n =$$

$$= \left(\ln x \cdot \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) dx^n =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) dx^n.$$

59. Последовательно дифференцируя $T_m(x)$ два раза, находим

$$T'_m(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T''_m(x) = \frac{-m^2 \cos(m \arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)} + \frac{xm \sin(m \arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{x \cdot T'_m(x)}{1-x^2}.$$

Подставляя найденные значения производных в левую часть исходного дифференциального уравнения

$$(1-x^2) \cdot T''_m(x) - x \cdot T'_m(x) + m^2 \cdot T_m(x) =$$

$$= (1-x^2) \cdot \left(-\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{x \cdot T'_m(x)}{1-x^2} \right) -$$

$$-x \cdot T'_m(x) + m^2 \cdot T_m(x) = 0,$$

что и требовалось доказать.

60. По формулам дифференцирования параметрически заданных функций имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t)}{\cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \neq 0\right);$$

$$y''_{xx} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+t)}}{e^t \cdot \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3(\frac{\pi}{4} + t)};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} = \frac{-e^t \cos^3(\frac{\pi}{4} + t) - e^{-t} \cdot 3\cos^2(\frac{\pi}{4} + t)(-\sin(\frac{\pi}{4} + t))}{\sqrt{2} \cos^6(\frac{\pi}{4} + t) \cdot e^t \cdot \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}(3\sin(\frac{\pi}{4} + t) - \cos(\frac{\pi}{4} + t)) \cos^2(\frac{\pi}{4} + t)}{2\cos^7(\frac{\pi}{4} + t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}(3\sin(\frac{\pi}{4} + t) - \cos(\frac{\pi}{4} + t))}{2\cos^5(\frac{\pi}{4} + t)} = \frac{e^{-2t} \cdot \sqrt{2}(2\sin t + \cos t)}{2\cos^5(\frac{\pi}{4} + t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t} \cdot (2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5(\frac{\pi}{4} + t)}, \quad t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

61. Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, где $\cos t \neq 1$, т. е. $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}};$$

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{4a}(-4)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin^5\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{2a^2 \cdot \sin^5\frac{t}{2} \cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2 \cdot \sin^7\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

62. Дифференцируем уравнение по переменной x:

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y},$$

тогда $y'' = (y')' = -\dfrac{y - xy'}{y^2} = -\dfrac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\dfrac{y^2 + x^2}{y^3} = -\dfrac{1}{y^3}$;

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{y^3}\right)' = -\frac{-3y^2y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5},\ y \neq 0.$$

63. Продифференцируем по x и найдём 1-ю производную:

$$y' = e^y \cdot y' + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{4}{1-e^y}.$$

Найдём 2-ю производную:

$$y'' = \left(\frac{4}{1-e^y}\right)' = -4 \cdot \frac{1}{(1-e^y)^2} \cdot (1-e^y)' = \frac{4e^y \cdot y'}{(1-e^y)^2}.$$

Подставим вместо y' выражение, найденное выше:

$$y'' = \frac{4e^y \cdot \frac{4}{1-e^y}}{(1-e^y)^2} = \frac{16e^y}{(1-e^y)^3}.$$

4 СЕМИНАР: Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

«Родители дали тебе жизнь, всё остальное в твоих руках».
Конфуций (551 г. до н.э.–479 г. до н.э.) –
древний мыслитель и философ Китая.

Домашнее задание (из Демидовича): 1236, 1237, 1244, 1246.1, 1250, 1251(а,б,в,г), 1252, 1255, 1260, 1262, 1263, 1264(а), 1287.

Знание производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$. Рассмотрим основные теоремы дифференциального исчисления.

4.1 Теорема Ферма́, или Необходимое условие локального экстремума

«Всё идёт хорошо, только мимо».
Михаил Жванецкий (1934—2020) —
русский писатель–сатирик.

Пусть $f:\ X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (соответственно, *точкой локального минимума*) функции f, если существует окрестность этой точки, такая что при всех x из этой окрестности $(x \in X)$, имеет место неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Точка x_0 называется *точкой локального экстремума* функции f, если x_0 – либо точка локального минимума, либо точка локального максимума. *Локальным экстремумом* называется значение функции в точке локального экстремума.

Теорема Ферма́.[1] Пусть X – промежуток, $f:\ X \to \mathbb{R}$, при этом

[1]Пьер Ферма́, фр. *Pierre de Fermát* (1601-1665) – французский матема-

1) c – внутренняя точка X;

2) c – точка локального экстремума функции f;

3) функция f дифференцируема в точке c.

Тогда $f'(c) = 0$.

(Кратко: производная дифференцируемой функции в точке локального экстремума равна нулю – необходимое условие экстремума).

Замечание 1 (геометрический смысл). Касательная к графику функции в точке $(c, f(c))$ параллельна оси абсцисс.

Замечание 2. Обратное утверждение (если функция дифференцируема в некоторой внутренней точке c промежутка X и производная $f'(c) = 0$, то c – точка локального экстремума), вообще говоря, не верно.

Пример 24. Например, функция $y = x^3$ имеет в точке $x = 0$ производную, равную нулю, однако эта точка не является экстремальной (является точкой перегиба). Таким образом, обращение производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием существования в точке локального экстремума. □

Замечание 3. У Исаака Ньютона этот факт упоминался как так называемый принцип остановки: «*Когда величина есть наибольшая или наименьшая из всех возможных, то она в этот момент не течёт ни вперёд, ни назад*».

Следствие. Если $c \in X$ – внутренняя точка и $f'(c) \neq 0$, то в точке c функция не может иметь локального экстремума.

тик, по профессии – юрист. Математикой занимался в свободное время. Ферма́ – один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. С его именем, помимо данной теоремы, связаны ещё две теоремы: великая теорема Ферма́ (для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z) и малая теорема Ферма́ (если – простое число и a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p).

4.2 Теорема Ро́лля, или Теорема о нуле производной

«Жить нужно так, чтобы всегда искать новые знания, и бояться их растерять».
Конфуций (551 г. до н.э.–479 г. до н.э.) – древний мыслитель и философ Китая.

Теорема Ролля.[1] Пусть функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента и принимает на концах сегмента одинаковые значения, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

Можно было привести следующую формулировку.

Пусть $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:
1) функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$;
2) функция f имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента;
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Замечание 1 (геометрический смысл). Теорема Ролля утверждает, что если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдётся точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Следствие. Если непрерывная функция обращается в нуль в n различных точках, то её производная обращается в нуль по крайней мере в $(n-1)$ различных точках.

Пример 25. Показать, что функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на сегменте $[1, 2]$, и найти точку $c \in [1, 2]$, в которой $f'(c) = 0$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ непрерывна на сегменте $[1, 2]$, дифференцируема внутри этого сегмента и принимает на его концах одинаковые значения $f(1) = f(2) = 0$. Тогда, по теореме

---

[1] Мишель *Ролль* (фр. *Michel Rolle*, 1652–1719) – французский математик, член Парижской академии наук. Разработал метод отделения действительных корней алгебраических уравнений.

Ролля, существует точка $c \in (1, 2)$, в которой $f'(c) = 2c - 3 = 0$, откуда находим $c = 3/2$. $\square$

4.3 Теорема Лагранжа, или Формула конечных приращений

Легенда. Однажды французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа кто-то спросил на музыкальном вечере, почему он любит музыку, и получил неожиданный ответ: *«Я люблю её потому, что она изолирует меня. Я слышу первые три такта; на четвёртом я ничего не различаю; я предаюсь своим мыслям, и ничто не отвлекает меня, именно таким образом я решил не одну трудную задачу».*

Теорема Лагра́нжа.[1] Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:
1) f непрерывна на $[a, b]$;
2) f имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента.
Тогда существует точка $c \in (a, b)$, для которой выполняется условие:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Замечание 1 (*геометрический смысл*). При выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдётся хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(c, f(c))$ параллельна хорде AB, где $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (т. е. хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка).

Замечание 2. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

[1] Жозеф Луи *Лагра́нж*, фр. *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) – французский математик и механик, почётный член Парижской и Петербургской академий. Ему принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, по различным вопросам дифференциальных уравнений, по алгебре и теории чисел, механике, астрономии. Лагранж впервые ввёл в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной y', $f'(x)$.

Следствия из теоремы Лагранжа.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Если $f'(x) \equiv 0$, $\forall\, x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ (условие постоянства функции на сегменте).

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$, дифференцируема при $x > a$ и $f'(x) \equiv 0$, $\forall\, x > a$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, +\infty)$.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b), $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$. Тогда $f(x) = g(x) + C$, где $C = const$.

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, если $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно возрастает на (a, b). Если же $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно убывает на (a, b) (условие монотонности функции).

Пример 26. Проверить, выполняется ли теорема Лагранжа для функции $f(x) = -x^2 + 2x$ на сегменте $[1, 3]$, и если да, то найти точку c.

Решение. Функция $f(x) = -x^2 + 2x$ непрерывна на сегменте $[1, 3]$ и дифференцируема на интервале $(1, 3)$, поэтому теорема Лагранжа применима, а значит, существует точка $c \in (1, 3)$, для которой выполняется условие:

$$f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad -3 - 1 = (-2c + 2) \cdot 2,$$

откуда находим $c = 2 \in (1, 3)$. $\square$

4.4 Теорема Коши́, или Обобщённая формула конечных приращений

«Труднее всего человеку даётся то, что даётся не ему».

Михаил Жванецкий (1934–2020) –
русский писатель–сатирик.

Теорема Коши.[1] Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

[1]Огюсте́н *Коши́* (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857) – один из вели-

1) непрерывны на сегменте $[a,b]$;
2) имеют конечную или бесконечную производную во всех внутренних точках этого сегмента;
3) $g'(x) \neq 0$ на этом интервале,
то на интервале (a,b) существует такая точка c, что имеет место равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание 1. Обратим внимание, что в формулировке теоремы $g(b) \neq g(a)$, т. к. в противном случае, по теореме Ролля, $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию.

Замечание 2. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x) = x$.

Замечание 3. Если дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить менее жёстким: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (a,b)$.

Пример 27. Объяснить, почему верна формула Коши для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1,1]$. Найти точку c.

Решение. Все условия теоремы Коши выполнены: функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[-1,1]$, $g(-1) \neq g(1)$, дифференцируемы во всех внутренних точках этого сегмента и $(f'(x))^2+(g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (-1,1)$. Поэтому на интервале $(-1,1)$ существует такая точка c, что имеет место равенство

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{2c+1}{3c^2},$$

откуда находим $c_1 = -1/3$, $c_2 = 1 \notin (-1,1)$. Итак, нашлась точка $c = -1/3$. □

чайших учёных Франции, математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, почётный член Петербургской и многих других академий. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в теорию дифференциальных уравнений, алгебру, геометрию, математическую физику и другие области математической науки. Один из основоположников механики сплошных сред.

4.5 Задачи

№64. [6, №1236] Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

№65. [6, №1237] Функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$. Доказать, что существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (обобщение теоремы Ролля на интервал).

№66. Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ на сегменте $[-1, 1]$.

№67. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$ на сегменте $[4, 5]$. Найти точку, в которой касательная параллельна хорде AB, где $A(4, f(4))$, $B(5, f(5))$.

№68. [6, №1244] Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

№69. Функция $f(x)$ всюду непрерывна и дифференцируема. Показать, что если уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень.

№70. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[2, 10]$ и дифференцируема внутри него. Известно, что $f(2) = 8$ и производная удовлетворяет условию $f'(x) \leqslant 4$ для всех $x \in (2, 10)$. Определить максимально возможное значение функции при $x = 10$.

№71. [6, №1246.1] Пусть $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ и для любых действительных x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) \equiv h \cdot f'(x).$$

Доказать, что функция линейна, т. е. имеет вид $f(x) = ax + b$, где a и b – постоянные.

№72. На дуге кривой $f(x) = x^3 - x$ между точками $A(-2, -6)$ и $B(1, 0)$ найти точку $C(c, f(c))$, касательная в которой параллельна хорде AB.

№73. [6, №1250] Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b). Можно ли для всякой точки $\xi \in (a, b)$ указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)\,?$$

Рассмотреть пример $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$, $\xi = 0$.

№74. [6, №1251(а,б)] Доказать неравенства:

$$\text{а) } |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R});$$

$$\text{б) } p \cdot y^{p-1}(x - y) \leqslant x^p - y^p \leqslant p \cdot x^{p-1}(x - y) \quad (0 < y < x,\ p > 1).$$

№75. [6, №1251(в,г)] Доказать неравенства:

$$\text{а) } |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|,$$

$$\text{б) } \frac{a - b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a - b}{b}, \text{ если } \ 0 < b < a.$$

№76. [6, №1252] Объяснить, почему не верна формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1, 1]$.

№77. Объяснить, почему верна формула Коши для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$ на сегменте $[-1, 1]$. Найти точку c.

№78. [6, №1255] Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

№79. [6, №1260] Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную производную $f'(x) \equiv k$, есть линейная функция $f(x) = kx + b$.

№80. [6, №1262] Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая уравнению $y' = \lambda y$ $(\lambda = const)$, есть показательная функция $y = C \cdot e^{\lambda x}$, где C – произвольная константа.

Указание: рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

№81. [6, № 1263] Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные в областях: 1) $x < 1$ и 2) $x > 1$. Вывести зависимость между этими функциями.

№82. [6, № 1264(а)] Доказать тождество

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geqslant 1.$$

№83. [6, № 1287] Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin \frac{2}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке[1] $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ – произвольно мало. Построить эскиз графика функции.

[1]Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ этой точки знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$.

4.6 Ответы и решения

64. Противоречия с теоремой Ролля нет, т.к. не выполнено одно из требований этой теоремы: функция $f(x)$ не имеет производной при $x = 0$. В самом деле,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = +\infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -\infty,$$

т. е. $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

65. Докажем с помощью теоремы Ролля для сегмента.

1) Пусть интервал (a, b) конечен и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = C$, где $C = const$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (a, b), \\ C, & \text{если } x = a, \ x = b, \end{cases}$$

непрерывную на $[a, b]$, причём $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля на (a, b) найдётся точка c такая, что $F'(c) = f'(c) = 0$.

2) Если (a, b) – бесконечный интервал, то в силу существования конечной производной $f'(x)$, непрерывности функции $f(x)$ и существования конечных, равных между собой, её предельных значений при $x \to a+0$ и $x \to b-0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ одна из прямых $y = C + \varepsilon$ или $y = C - \varepsilon$ пересечёт кривую $y = f(x)$ по меньшей мере в двух точках, абсциссы которых обозначим c_1 и c_2. Для функции $f(x)$ на сегменте $[c_1, c_2]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому на (c_1, c_2) (а значит, и на (a, b)) найдётся такая точка c, что $f'(c) = 0$.

3) Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Тогда как в случае конечного, так и бесконечного интервала (a, b), уравнение $f(x) = A$, где $A > 0$ – любое фиксированное число (если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$) или $f(x) = -A$ (если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$) всегда имеет два разных корня, которые обозначим α_1 и α_2. Применяя теорему Ролля к $f(x)$ на сегменте $[\alpha_1, \alpha_2]$, приходим к выводу, что на интервале

(α_1, α_2) (а значит, и на (a, b)) найдётся хотя бы одна точка c: $f'(c) = 0$.

66. Данная функция является непрерывной на указанном сегменте, причём $f(-1) = f(1) = 1$. Найдём производную: $f'(x) = (\sqrt[3]{x^2})' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x \neq 0)$. В точке $x = 0$ производную найдём по определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{|x|^2}}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt[3]{|x|}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \to +0, \\ -\infty, & \text{если } x \to -0. \end{cases}$$

Так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то функция не имеет производной в точке $x = 0$, и поэтому теорема Ролля не применима.

67. Данная функция имеет разрыв при $x = 3$, но на сегменте $[4, 5]$ она непрерывна и дифференцируема внутри него. Следовательно, здесь применима теорема Лагранжа. Так как $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-3)^2}$, то имеем

$$f(5) - f(4) = f'(c)(5 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3 = -\frac{2}{(c-3)^2},$$

откуда находим $c = 3 + \sqrt{2} \in (4, 5)$.

68. По формуле конечных приращений (которая применима, поскольку $y = x^3$ непрерывна на $[-1, 2]$ и дифференцируема внутри этого сегмента) на интервале $(-1, 2)$ найдётся точка c:

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8 - (-1)}{3} = 3c^2,$$

откуда $c = \pm 1$ и получаем две точки $A(-1, -1)$ и $B(1, 1)$, из которых только вторая, строго говоря, отвечает условиям теоремы (абсцисса попадает в нужный интервал). Однако если принять во внимание, что функция $y = x^3$ определена и дифференцируема всюду, то в первой из точек касательная также будет параллельна хорде (убедитесь в этом графически).

69. Обозначим корни уравнения $f(x) = 0$ через a и b. В соответствие с условием, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Следовательно, к ней применима формула Лагранжа и найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Поскольку $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(c) = \dfrac{0 - 0}{b - a} = 0$. Таким образом, уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень.

Подчеркнём, что у производной может быть более одного нуля (например, можно рассмотреть функцию $f(x) = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$, где производная имеет два нуля). Теорема Лагранжа позволяет доказать существование по меньшей мере одного нуля.

Ясно, что рассмотренную схему можно обобщить на случай n нулей и производной $(n-1)$-го порядка. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет три действительных корня, то первая производная производная будет иметь (по крайней мере) два нуля, а вторая производная – соответственно, не менее одного нуля. В общем случае, если функция имеет n действительных нулей, то производная $(n-1)$-го порядка будет иметь не менее 1 нуля.

70. Для оценки значения $f(10)$ воспользуемся формулой Лагранжа

$$f(10) - f(2) = f'(c)(10 - 2), \quad \text{где } c \in (2, 10).$$

Перепишем в виде $f(10) = f(2) + 8f'(c) \leqslant 8 + 8 \cdot 4 = 40$. Таким образом, максимально возможное значение функции на правом конце интервала равно 40.

71. Полагая $x = 0$ в тождестве $f(x + h) - f(x) \equiv h \cdot f'(x)$, получаем тождество $f(h) - f(0) \equiv h \cdot f'(0)$, верное при всех $h \in (-\infty, +\infty)$. Переобозначая в полученном равенстве h на x (в принципе, делать это не обязательно) и вводя обозначения $f'(0) = a$, $f(0) = b$, получаем $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

72. Согласно геометрическому смыслу теоремы Лагранжа, абсцисса точки c удовлетворяет условию

$$f(1) - f(-2) = f'(c)(1 - (-2)) \quad \Leftrightarrow \quad 0 - (-6) = (3c^2 - 1) \cdot 3,$$

откуда находим $c = \pm 1$. По условию теоремы Лагранжа $c \in (-2, 1)$, поэтому подходит только $c = -1$, тогда $f(c) = 0$. Проиллюстрируйте ситуацию на рисунке. Ответ: $C(-1, 0)$.

73. Вообще говоря, нет. Например, если на (a, b) функция $f(x)$ возрастает, то для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$, имеем $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ и тогда для тех точек интервала, в которых $f'(\xi) = 0$, равенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$$

невозможно. В частности, для функции $y = x^3$ для любых $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ имеем

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0,$$

следовательно, для точки $\xi = 0$ значений x_1 и x_2 из условий задачи не существует.

74. а) Функция $y = \sin x$ всюду непрерывна и дифференцируема, поэтому по теореме Лагранжа между точками x и y найдётся точка c:

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cdot \cos c,$$

откуда $|\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos c| \leqslant |x - y|$.

б) Функция $y = x^p$ при $p > 1$ также всюду непрерывна и дифференцируема, поэтому по теореме Лагранжа между точками y и x найдётся точка c:

$$x^p - y^p = (x - y) \cdot p \cdot c^{p-1}, \quad \text{где } \; y < c < x,$$

откуда $p \cdot y^{p-1} < p \cdot c^{p-1} < p \cdot x^{p-1}$ и тогда получаем требуемое неравенство

$$p \cdot y^{p-1}(x - y) \leqslant x^p - y^p \leqslant p \cdot x^{p-1}(x - y).$$

Двойное неравенство обращается в равенство при $x = y$.

75. а) Так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом сегменте $[a, b]$, то найдётся $\xi \in (a, b)$:

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

откуда $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|$.

б) Так как функция $y = \ln x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом сегменте $[b, a]$, то найдётся $\xi \in (b, a)$:

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b),$$

откуда $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$.

76. Нарушено условие теоремы Коши $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при всех $x \in (-1, 1)$. В точке $x = 0$ имеем $(f'(0))^2 + (g'(0))^2 = 0$, следовательно, формула Коши не применима (или $g'(x) = 0$ при $x = 0$).

77. Все условия теоремы Коши выполнены: $g(-1) \neq g(1)$, $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $\forall\, x \in (-1, 1)$. Здесь $c = -\frac{1}{3}$, т. к.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{2-0}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c+1}{3c^2},$$

откуда $c_1 = -1/3$, $c_2 = 1 \notin (-1, 1)$.

78. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на интервале (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in (a, b)$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. По формуле Лагранжа для любой пары точек $x', x'' \in (a, b)$ имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(c)||x' - x''| \leqslant M|x' - x''|$$

(т. к. $|f'(x)| \leqslant M$). Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и выберем $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $|x' - x''| < \delta$ имеем $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, т. е. $f(x)$ – равномерно непрерывна на (a, b).

79. Если $f(x) = kx+b$, то $f'(x) = k$. Докажем, что функция $f(x) = kx + b$ – единственная. От противного, допустим, что существует функция $\varphi(x)$, отличная от линейной и такая, что $\varphi'(x) = k$. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, тогда $\psi'(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа $\psi(x) = C = const$ при $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x) = f(x)+C = kx+b+C$ – линейная функция. Противоречие с предположением.

80. Найдём производную $(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} + ye^{-\lambda x}(-\lambda) = e^{-\lambda x}(y' - \lambda y) \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. То есть уравнение $y' = \lambda y$ равносильно тому, что $(ye^{-\lambda x})' \equiv 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. По следствию 1 из теоремы Лагранжа получаем, что $ye^{-\lambda x} \equiv C$, $x \in \mathbb{R}$ (C – произвольная константа). Выражая y, окончательно находим $y = C \cdot e^{\lambda x}$.

81. Равенство производных устанавливается непосредственным дифференцированием. Так как $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = const$, т. е.

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x < 1, \\ C_2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ имеем $f(0) - g(0) = \dfrac{\pi}{4}$, следовательно, $C_1 = \dfrac{\pi}{4}$. При $x = 2$ имеем $f(2) - g(2) = \operatorname{arctg}(-3) - \operatorname{arctg} 2 = -(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2)$. Так как $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg} 2 < \pi$. При этом $tg(\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg} 2) = -1$, поэтому $\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 = \dfrac{3\pi}{4}$. Значит, $C_2 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

82. Найдём производную функции из левой части тождества:

$$\left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot$$

$$\cdot 2 \cdot \frac{1+x^2-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} \equiv 0$$

при $|x| > 1$. Отсюда, т. к. функция $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна при $|x| \geqslant 1$, то по следствию 1 из теоремы Лагранжа получаем, что

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} C_1, & \text{если } x \geqslant 1, \\ C_2, & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Найдём константы C_1 и C_2. Так как функция $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна при $x \leqslant -1$ и при $x \geqslant 1$, то полагая $x = 1$, находим $C_1 = \pi$, а полагая $x = -1$, определяем $C_2 = -\pi$. Поэтому окончательно имеем

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{при } |x| \geqslant 1.$$

83. Вычислим приращение функции $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \left(1 + \Delta x \cdot \sin \frac{2}{\Delta x}\right).$$

Очевидно, при достаточно малых по абсолютной величине Δx приращение функции Δf совпадает по знаку с приращением аргумента Δx, поэтому $f(x)$ возрастает при $x = 0$.

Фиксируем любое малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что функция не является возрастающей в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку. Найдём производную $f'(x) = 1 + 2x \cdot \sin \frac{2}{x} - 2\cos \frac{2}{x}$ $(x \neq 0)$. Всегда можно выбрать настолько большое n, что $x'_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{2}{\pi + 2\pi n}$ будут принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Так как $f'(x'_n) = -1$, $f'(x''_n) = 3$, то $f(x)$ не возрастает на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (так как производная не сохраняет определённый знак).

Вывод: если функция $f(x)$ возрастает в некоторой точке, то $f(x)$ не обязательно возрастает в некоторой окрестности этой точки. Эскиз графика постройте самостоятельно (при $x \to \pm\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 3x$, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$).

5 СЕМИНАР: Теорема Кантора и другие теоремы о свойствах и признаках равномерной непрерывности

«Мало знать себе цену — надо ещё пользоваться спросом».
Михаил Жванецкий (1934—2020) —
русский писатель–сатирик.

Домашнее задание.
Из Демидовича: 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 798, 800, 801, 801.2, 802(а,в,д), 804, 806.2.
Из данного сборника: 117, 118, 121, 123, 128.

Выше мы получили первое представление о таком виде непрерывности функций как равномерная непрерывность. Однако исследование равномерной непрерывности функции только с помощью определения бывает достаточно трудоёмким и поэтому неэффективным. Если же знать дополнительно некоторые достаточные (необходимые, необходимые и достаточные) условия равномерной непрерывности, то это позволяет находить более быстрые и оптимальные способы для выяснения, является ли данная функция равномерно непрерывной или нет.

Напомним определение равномерной непрерывности функции на множестве.

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X, если $f(x)$ определена на X и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Рассмотрим это понятие подробнее и обратимся к свойствам и признакам равномерной непрерывности.[1]

[1]Свойство – необходимое условие, признак – достаточное условие, критерий – необходимое и достаточное условие.

5.1 Равномерная непрерывность – нелокальное свойство функции, относящееся к промежутку

Непрерывность в точке относится к локальным (точечным) свойствам функции, и когда речь идёт о непрерывности функции на множестве, то подразумевается непрерывность в каждой отдельной точке этого множества. В отличие от этого равномерная непрерывность – это глобальное свойство функции, характеризующее поведение функции сразу на некотором множестве.

5.2 Равномерная непрерывность $\Rightarrow$ непрерывность

Т1 (*о связи равномерной непрерывности с обычной непрерывностью*). Из равномерной непрерывности функции $f(x)$ на множестве X следует её непрерывность в каждой точке этого множества (а значит, и на всём множестве).

Действительно, если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x', то получится определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x'.

Обратно, из непрерывности функции на множестве X в общем случае не следует равномерная непрерывность на этом множестве.

Пример 28. Функция $y = \sin\dfrac{1}{x}$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на интервале $(0, 1)$. $\square$

5.3 Графическая интерпретация равномерной непрерывности

Для графической интерпретации равномерной непрерывности, зафиксировав некоторое $\varepsilon > 0$ и выбрав по нему $\delta > 0$, представим себе в системе координат Oxy прямоугольник высотой ε и шириной δ со сторонами, параллельными координатным осям. Если функция равномерно непрерывна на множестве X, то можно так перемещать этот прямоугольник вдоль графика функции в пределах этого множества (сохраняя параллельность его сторон осям координат), чтобы график не пересекал верхней и нижней сторон прямоугольника, а только боковые стороны.

5.4 Теорема Кантора

T2 (*Ка́нтора*). Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Очевидно, что с помощью этой теоремы вопрос о равномерной непрерывности функции на сегменте сводится к вопросу о непрерывности функции на этом сегменте.

Пример 29. [6, №794] Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. Так как функция непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ как суперпозиция непрерывных функций (точки разрыва $x = \pm 2$ не попадают в этот промежуток), то по теореме Кантора это означает равномерную непрерывность функции. $\square$

5.5 О связи равномерной непрерывности функции на интервале и его замыкании – отрезке

T3 (*критерий равномерной непрерывности на интервале*). Непрерывная на конечном интервале (a, b) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на нём тогда и только тогда, когда эту функцию можно доопределить на сегмент $[a, b]$ непрерывным образом (т. е. когда существует непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на интервале (a, b)).[1]

Пример 30. Доказать равномерную непрерывность функции на интервале $(0, 1)$:
$$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

[1]Это возможно сделать лишь в случае, когда функция имеет конечные односторонние пределы $f(a + 0)$ и $f(b - 0)$.

Решение. Функция непрерывна на указанном интервале, причём существуют конечные пределы на концах интервала: $\lim\limits_{x\to+0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ (как предел произведения бесконечно малой функции x и ограниченной функции $\sin\frac{1}{x}$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$) и $\lim\limits_{x\to1-0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = \sin 1$. Но тогда функцию $f(x)$ можно доопределить непрерывным образом на сегмент $[0,1]$, и эта новая функция по теореме Кантора будет равномерно непрерывной на $[0,1]$. Следовательно, совпадающая с ней на интервале $(0,1)$ функция $f(x)$ также равномерно непрерывна. □

5.6 О равномерной непрерывности функции на объединении смежных промежутков

Т4 (*о сохранении равномерной непрерывности при объединении смежных сегментов*). Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из двух смежных сегментов $[a,b]$ и $[b,c]$ $(a<b<c)$, то она равномерно непрерывна на их объединении $[a,c]$.[1]

Обратное тоже верно: если функция равномерно непрерывна на сегменте $[a,c]$ и $a<b<c$, то она равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a,b]$ и $[b,c]$.

Замечание 1. Более общее утверждение: если функция равномерно непрерывна на некотором промежутке, то она равномерно непрерывна на любом промежутке, целиком принадлежащем данному.

Замечание 2. В формулировке данного условия равномерной непрерывности можно заменить один или оба сегмента на полуинтервал или полубесконечные промежутки. Так, например, утверждение справедливо для смежных промежутков вида $[a,b]$ и $[b,+\infty)$, а также $(a,b]$ и $[b,c)$.

Пример 31. Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве $\mathbb{R}$:

[1] *Смежными* мы называем сегменты (промежутки), имеющие одну общую точку, т. е. пересекающиеся лишь в граничных точках.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(x-1), & \text{если } -\infty < x \le 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Решение. Так как функция равномерно непрерывна на каждой из двух смежных полупрямых $(-\infty, 1]$ и $[1, +\infty)$, то, в силу утверждения выше, она будет равномерно непрерывна и на их объединении – всей числовой прямой. $\square$

Замечание 3. Утверждение справедливо и для перекрывающихся сегментов (интервалов, полуинтервалов), т. е. имеющих более одной общей точки.

Пример 32. Например, пусть $a < b < c < d$, функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, d]$ и равномерно непрерывна на каждом из пересекающихся сегментов $[a, c]$ и $[b, d]$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на их объединении. $\square$

Замечание 4. Для объединения двух интервалов аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Пример 33. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом из двух смежных интервалов $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, но при этом не является равномерно непрерывной на их объединении.

Решение. Действительно, на каждом из указанных интервалов функцию можно доопределить до непрерывной на сегменты $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно. Но тогда по утверждению из п. 5 функция равномерно непрерывна на каждом из этих интервалов. С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{x \to +0} (|\sin x|/x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to -0} (|\sin x|/x) = -1$, то взяв $\varepsilon = 1$ и любое $\delta > 0$, можно выбрать точки x', x'', лежащие по разные стороны от нуля так, что $|x'' - x'| < \delta$, а разность значений функции в этих точках будет сколь угодно близко к 2, и, следовательно, больше $\varepsilon = 1$. Это и означает, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на объединении этих интервалов. $\square$

5.7 О сохранении равномерной непрерывности на сегменте при отбрасывании конечного (счётного) числа точек

При размышлениях на тему о равномерной непрерывности возникает вопрос: обязательно ли равномерно непрерывная функция должна быть определена на сплошном промежутке в виде интервала, сегмента и проч., или область определения может быть «не сплошной»? Ответ на это даёт следующее утверждение.

T5 (*о сохранении равномерной непрерывности на сегменте при отбрасывании конечного (счётного) числа точек*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ всюду на $[a, b]$, за исключением конечного (счётного) множества точек $X = \{x_1, x_2, ...\} \in [a, b]$, в которых она не определена. Очевидно, что график $g(x)$ отличается от графика $f(x)$ тем, что на нём выколоты точки с координатами $(x; f(x))$, $x \in X$. Тогда функция $g(x)$ равномерно непрерывна на множестве $[a, b] \backslash X$.

Справедливость этого утверждения основана на том, что после отбрасывания из сегмента конечного или счётного множества точек оставшееся множество точек по-прежнему будет всюду плотным, и для функции $g(x)$ будет выполняться определение равномерной непрерывности с тем же выбором $\delta(\varepsilon)$, что и для функции $f(x)$.

Таким образом, важно, чтобы множество, на котором рассматривается непрерывная функция, было всюду плотным. И любой промежуток этим свойством, конечно, обладает.

Пример 34. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ равномерно непрерывна на сегменте $[-1, 1]$. Отбросим из этого сегмента точки $x \in \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, ..., \pm\frac{1}{n}, ...\}$, $n \in \mathbb{N}$ (будем считать, что функция не определена в этих точках). Таких точек счётное множество (это множество нулевой меры). На оставшемся множестве функция по-прежнему будет равномерно непрерывной. $\square$

5.8 О равномерной непрерывности функции с ограниченной производной

T6 (*о равномерной непрерывности функции с ограниченной производной*). Если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную, то она равномерно непрерывна на (a, b).

Обратное утверждение о том, что если дифференцируемая функция равномерно непрерывна, то её производная обязательно ограничена – неверно.

Пример 35. В качестве примера можно привести фукнкцию $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, 1]$. Функция по теореме Кантора равномерно непрерывна на указанном отрезке, однако в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную. □

Утверждение справедливо и в случае полуинтервалов: если функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, причём на интервале (a, b) имеет ограниченную производную, то она равномерно непрерывна на $[a, b)$.

Действительно, взяв два произвольных числа c_1, c_2 такие, что $a < c_1 < c_2 < b$, получим, что функция $f(x)$ непрерывна, а значит, равномерно непрерывна, на сегменте $[a, c_2]$, а также равномерно непрерывна (в силу ограниченности производной) на интервале (c_1, b). Но тогда в силу утверждения из п. 6 функция будет равномерно непрерывна на объединении этих перекрывающихся промежутков.

Пример 36. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{arcctg} x + 20$ равномерно непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

Решение. Действительно, производная этой функции

$$(\operatorname{arcctg} x + 20)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ограничена: $\left|-\frac{1}{1+x^2}\right| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, поэтому функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. □

Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, и её график имеет наклонную аси́мптоту при $x \to +\infty$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.[1]

Пример 37. Исследовать на равномерную непрерывность функцию

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}, \quad x \in [1, +\infty).$$

Решение. Так как $\alpha(x) = 1/(x+1) \to 0$ при $x \to +\infty$, то у графика непрерывной функции существует наклонная асимптота при $x \to +\infty$: $y = 2x - 1$. Поэтому, согласно утверждению выше, функция равномерно непрерывна при $x \in [1, +\infty)$. $\square$

Равномерная непрерывность ли́пшицевых функций. Если для любых точек $x', x'' \in [a, b]$ приращение функции удовлетворяет неравенству

$$|f(x'') - f(x')| \leq L \cdot |x'' - x'|^{\alpha},$$

где $0 < \alpha \leq 1$, L – некоторая постоянная, называемая константой Ли́пшица, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица* порядка α на отрезке $[a, b]$, и пишут $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. Условие Липшица означает ограничение на поведение приращения функции.[2]

Пример 38. Пример липшицевой функции: $f(x) = \operatorname{arctg} x$. В самом деле, с помощью теоремы Лагранжа мы доказывали неравенство

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

которое означает, что данная функция удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $L = 1$, $\alpha = 1$. $\square$

Справедливы следующие утверждения.

---

[1] Существование у графика функции $y = f(x)$ наклонной аси́мптоты при $x \to +\infty$ означает, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где k, b – числа, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

[2] Условие Липшица впервые рассмотрел в 1864 году немецкий математик Рудольф Липшиц (R. Lipschitz; 1832 – 1903, профессор Бреславльского и Боннского университетов) в качестве достаточного условия для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$. Иногда, исторически неправильно, связывают с именем Липшица только наиболее важный случай условия Липшица с $\alpha = 1$, а в случае $\alpha < 1$ говорят об условии Гёльдера.

1) Каждая функция, удовлетворяющая при каком-либо $\alpha \in (0, 1]$ условию Липшица на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$.

2) Функция, имеющая на $[a, b]$ ограниченную производную, удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с любым $\alpha \in (0, 1]$.

3) Теорема Радемахера: функция, удовлетворяющая условию Липшица на множестве $\Omega \in \mathbb{R}$, дифференцируема на нём почти всюду (т. е. всюду, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль).

4) Если две функции $f(x), g(x)$ удовлетворят условию Липшица и c – некоторая константа, то функции $cf(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(g(x))$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{1}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0)$ также являются липшицевыми.

Функция может не во всех точках иметь производную, но при этом удовлетворять условию Липшица и, следовательно, быть равномерно непрерывной. Таким образом, липшицевы функции образуют ещё один класс равномерно непрерывных функций.

5.9 О равномерной непрерывности непрерывной функции, имеющей конечный предел на бесконечности

Рассмотрим ещё один класс равномерно непрерывных функций.

T7 (*о равномерной непрерывности непрерывной функции, имеющей конечный предел на бесконечности*). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \in [a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$.

Пример 39. Показать, что функция $f(x) = e^{-2x}$ равномерно непрерывна на множестве $x \in [0, +\infty)$.

Решение. В самом деле, функция непрерывна на $[0, +\infty)$, причём $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, следовательно, эта функция равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$. $\square$

5.10 О равномерной непрерывности ограниченной монотонной непрерывной на интервале функции

Рассмотрим следующее достаточное условие равномерной непрерывности.

Т8 (*о равномерной непрерывности ограниченной монотонной непрерывной на интервале функции*). Ограниченная монотонная функция $f(x)$, непрерывная на конечном или бесконечном интервале, равномерно непрерывна на этом интервале.

Пример 40. Показать, что функции $f(x) = \arccos x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$ являются равномерно непрерывными, соответственно, на интервалах $(-1; 1)$, $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Обе функции ограничены, монотонны и непрерывны на соответствующих интервалах, а поэтому равномерно непрерывны на них. $\square$

Замечание. Непрерывная монотонная и ограниченная на полубесконечном промежутке функция $f(x)$ также равномерно непрерывна на этом промежутке.

5.11 Об арифметических операциях над равномерно непрерывными функциями

Т9 (*об арифметических операциях над равномерно непрерывными функциями*). Сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на конечном интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на (a, b).

Если же (a, b) – бесконечный интервал, то для суммы равномерная непрерывность будет, в то время как произведение может, вообще говоря, оказаться не равномерно непрерывным.

Пример 41. Функции $f(x) = g(x) = x$ являются равномерно непрерывными на $\mathbb{R}$, а их произведение $f(x) \cdot g(x) = x^2$ – нет. $\square$

Следствие. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, причём $f(x)$ равномерно непрерывна на X, а $g(x)$ – нет. Тогда сумма $f(x)+g(x)$ не будет равномерно непрерывной на данном множестве.

Пример 42. Доказать, что функция $f(x) = x + \ln x$ равномерно непрерывна на множестве $x \in [1, +\infty)$, а функция $g(x) = x^2 + \ln x$ не является равномерно непрерывной на этом множестве.

Решение. Так как каждая из функций x и $\ln x$ в отдельности равномерно непрерывна на указанном промежутке (в силу ограниченности производных), то их сумма $f(x) = x + \ln x$ также равномерно непрерывна на $x \in [1, +\infty)$. Функция x^2 не является равномерно непрерывной на $[1, +\infty)$, поэтому сумма $g(x) = x^2 + \ln x$ равномерно непрерывной не будет. □

5.12 Об ограниченности функции, равномерно непрерывной на ограниченном промежутке

T10 (*необходимое условие равномерной непрерывности*). Равномерно непрерывная на ограниченном промежутке функция ограничена на этом промежутке.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, например функция $y = \sin\frac{1}{x}$ ограничена, но не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

Замечание 1. Функция, равномерно непрерывная на неограниченном промежутке, может быть неограниченной на этом промежутке. Например, $y = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ определена, но не ограничена в любой проколотой окрестности точки x_0, то она не является равномерно непрерывной ни в какой проколотой окрестности этой точки.

Пример 43. Показать, что функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ не является равномерно непрерывной на $(0, \pi)$.

Действительно, эта функция не ограничена в любых проколотых окрестностях граничных точек интервала, а значит, функция не может быть равномерно непрерывной на этом интервале. □

5.13 О равномерной непрерывности непрерывной периодической функции

В следующем достаточном условии равномерной непрерывности речь идёт о периодических функциях.

T11 (*о равномерной непрерывности непрерывной периодической функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и периодична с периодом T. Тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этой прямой.

Пример 44. Показать, что функция $f(x) = 4\sin(11x - 1) + 2$ равномерно непрерывна на множестве $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Функция $f(x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и периодической с периодом $T = \frac{2\pi}{11}$, а значит, согласно данному утверждению, она равномерно непрерывна на этом множестве. $\square$

5.14 Задачи

№84. [6, №787] Сформулировать в положительном смысле на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве (интервале, сегменте и т. п.), но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

Решить задачи на доказательство необходимых и (или) достаточных условий равномерной непрерывности:

№85. Доказать теорему Кантора (достаточное условие равномерной непрерывности на сегменте).

№86. [6, №806.2] Доказать, что для того чтобы функцию $f(x)$, определённую и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

№87. [6, №801.2] Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из двух смежных сегментов $[a, b]$ и $[b, c]$ $(a < b < c)$, то она равномерно непрерывна на их объединении $[a, c]$.

№88. [6, №791] Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \in [a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$.

№89. Доказать, что ограниченная монотонная функция $f(x)$, непрерывная на конечном или бесконечном интервале, равномерно непрерывна на этом интервале.

№90. [6, №804] Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на конечном интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на (a, b).

№91. Доказать, что равномерно непрерывная на ограниченном промежутке функция ограничена на этом промежутке.

№92. Доказать, что если функция $f(x)$ определена, но не ограничена в любой проколотой окрестности точки x_0 , то она не является равномерно непрерывной ни в какой проколотой окрестности этой точки.

№93. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и периодична с периодом T. Доказать, что тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этой прямой.

Доказать, используя определение равномерно непрерывной функции, что функция является равномерно непрерывной на заданном промежутке:

№94. [6, № 802(а,в,д)] Для заданного $\varepsilon > 0$ найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь), удовлетворяющее условию равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

$$\text{а) } f(x) = 5x - 3,\ \ x \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } f(x) = \tfrac{1}{x},\ \ 0{,}1 < x < 1;$$

$$\text{в) } f(x) = 2\sin x - \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

№95. $y = x^2$, $x \in (a, b)$;

№96. $y = x^3$, $x \in [a, b]$;

№97. $y = e^x$, $x \in (0, 1)$;

№98. $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$;

№99. [6, № 792] $y = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

№100. [6, № 798] $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказать, используя отрицание определения равномерно непрерывной функции, что функция не является равномерно непрерывной на заданном промежутке:

№101. [6, № 788] Показать, что функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

№102. $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, 1]$;

№103. $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$;

№104. [6, № 795] $y = \ln x$, $x \in (0, 1]$;

№105. $y = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$;

№106. [6, № 789] Показать, что функция $y = \sin \dfrac{\pi}{x}$ непрерывна и ограничена в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

№107. [6, № 800] $y = x \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

№108. [6, №790] $y = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

№109. $y = \cos(x^3)$, $x \in \mathbb{R}$;

Применима ли теорема Кантора для установления равномерной непрерывности функции на множестве:

№110. [6, №794] $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

№111. $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$, $x \in [0, 100]$;

№112. $f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27-3x}}$, $x \in [6, 8\frac{2}{3}]$;

№113. $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot (1 - \operatorname{sgn}^2 x)$, $x \in [-1, 1]$;

№114. $f(x) = \dfrac{1}{[2x]}$, $x \in [1, 1\frac{1}{4}]$;

№115. $f(x) = \dfrac{|x-1| - |2x+1|}{|x-2| - |2x+2|}$, $x \in [-3, 2]$.

Доказать, используя ограниченность производной (или наличие наклонной асимптоты), что функция является равномерно непрерывной на заданном промежутке:

№116. $f(x) = \sin(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$;

№117. $f(x) = \cos^2 x$, $x \in (-\infty, 100\pi)$;

№118. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \in [0, +\infty)$;

№119. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$;

№120. $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$, $x \in [0, +\infty)$.

Доказать равномерную непрерывность функции, имеющей конечный предел на бесконечности:

№121. $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$;

№122. $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Исследовать на равномерную непрерывность периодические функции:

№123. $f(x) = |\sin 5x|$, $x \in \mathbb{R}$;

№124. $f(x) = 2\sin x - \cos 7x$, $x \in \mathbb{R}$;

№125. $y = \arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Используя различные приёмы, исследовать на равномерную непрерывность функцию на заданном промежутке:

№126. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ равномерно непрерывна на множестве $x \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$.

№127. [6, № 801] Показать, что функция

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

равномерно непрерывна на каждом интервале

$$J_1 = \{x \mid -1 < x < 0\} \quad \text{и} \quad J_2 = \{x \mid 0 < x < 1\}$$

по-отдельности, но не является равномерно непрерывной на их объединении $J_1 \cup J_2 = \{x \mid 0 < |x| < 1\}$.

№128. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot \cos \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$;

№129. $f(x) = \begin{cases} -x^2 \cdot \ln(x^4 + 1), \ -1 < x < 0; \\ \operatorname{arctg} x, \ x \geq 0; \end{cases}$

№130. $f(x) = x^2 \left(\cos \dfrac{1}{x} - 1 \right)$, $x \in (0, +\infty)$.

5.15 Ответы и решения

84. 1) Сформулируем, что $f(x)$ непрерывна на множестве X (т. е. непрерывна в любой точке x_0 этого множества). Функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, если она определена на X и $\forall\ \varepsilon > 0$ и $\forall\, x_0 \in X$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) Сформулируем, что при этом $f(x)$ не является равномерно непрерывной на X: $\exists\ \varepsilon_0 > 0$: $\forall\ \delta > 0$ (сколь угодно малого) найдутся $x', x'' \in X$, удовлетворяющие условию $|x'' - x'| < \delta$, для которых $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$ (а следовательно, и для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$).

85. Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Предположим, что функция не является равномерно непрерывной на этом сегменте. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ $\exists x', x'' \in [a, b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, но $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$. Возьмём произвольную последовательность $\{\delta_n\} \to 0$, $\delta_n > 0$. Согласно предположению, для выбранных δ_n $\exists x'_n, x''_n \in [a, b]$, для которых $|x''_n - x'_n| < \delta_n$, но $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$, она ограничена и поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $c \in [a, b]$. В силу того что $|x''_n - x'_n| < \delta_n$ и $\{\delta_n\} \to 0$, имеем: $\{x''_{n_k}\} \to c$ при $n_k \to +\infty$. По условию $f(x)$ непрерывна в точке c, поэтому $f(x'_{n_k}) \to f(c)$, $f(x''_{n_k}) \to f(c)$ при $n_k \to +\infty$ и, значит, $\lim\limits_{n_k \to +\infty} \left|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| = 0$.

С другой стороны, в силу неравенства $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ получаем, что $|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon$, откуда следует, что $\lim\limits_{n_k \to +\infty} \left|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

86. 1) *Достаточность* ($\Leftarrow$). Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале (a, b). Покажем, что тогда эту функцию можно продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$. Достаточно доказать, что существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$. Так как $f(x)$ – равномерно непрерывна на интервале (a, b), то $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x''$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Для всех x', x'' таких, что $0 < x' - a < \delta/2$, $0 < x'' - a < \delta/2$, имеем:

$$|x''-x'| = |(x''-a)-(x'-a)| \leq |x''-a|+|x'-a| < \delta/2+\delta/2 = \delta,$$

при этом выполняется $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши существования предельного значения функции[1] при $x \to +a$ существует конечный предел $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично доказывается существование конечного предела $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

2) *Необходимость* ($\Rightarrow$) вытекает из того, что если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, то принимая их в качестве $f(a)$ и $f(b)$, получим непрерывную функцию на $[a, b]$. Тогда по теореме Кантора эта функция будет равномерно непрерывна на $[a, b]$, а значит, и на (a, b).

87. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Поскольку $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\exists\delta_1(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$. Аналогично для выбранного $\varepsilon\ \exists\delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in [b, c]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta_2$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$.

Пусть теперь $x' \in [a, b]$, $x'' \in [b, c]$ и $|x''-x'| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $b-x' < \delta \leq \delta_1$, $x''-b < \delta \leq \delta_2$, поэтому $|f(x')-f(b)| < \varepsilon/2$, $|f(x'') - f(b)| < \varepsilon/2$, а значит,

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - f(b)) - (f(x') - f(b))| \leq$$

$$\leqslant |f(x'') - f(b)| + |f(x') - f(b)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного ε мы указали такое δ, что если $x', x'' \in [a, c]$ и $|x'' - x'| < \delta$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, что означает равномерную непрерывность $f(x)$ на $[a, c]$.

[1] Для того чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$: как только $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, то выполняется $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Другое доказательство: так как функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов, то она непрерывна на каждом из них, а значит, непрерывна на их объединении. Но тогда по теореме Кантора функция равномерно непрерывна на их объединении. Обратное утверждение докажите самостоятельно.

88. Доказательство 1. Из существования предела согласно критерию Коши следует, что $\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ E(\varepsilon) > a$: $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \ \forall x', x'' > E$. Фиксируем такое число E. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, E]$, то в силу теоремы Кантора она равномерно непрерывна на $[a, E]$, т. е. для указанного выше $\varepsilon > 0 \ \exists\delta(\varepsilon) > 0$: неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ верно $\forall x', x'' \in [a, E]$, как только $|x'' - x'| < \delta$. Но так как неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ верно $\forall x', x'' \geq a$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

Доказательство 2. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Из существования предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ следует, что $\forall\varepsilon \ \exists E(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall x \geq E$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon/4$. Поэтому для любых $x', x'' \geq E$ выполнено неравенство

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - A) + (A - f(x'))| \leq$$

$$\leqslant |f(x'') - A| + |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

На отрезке $[a; E]$ непрерывная функция $f(x)$ является равномерно непрерывной согласно теореме Кантора. Поэтому для заданного ε найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$, если $x', x'' \in [a, E]$ и $|x'' - x'| < \delta$.

Пусть теперь $E - x' < \delta$, $x'' - E < \delta$ и, следовательно,

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(E)| + |f(x') - f(E)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Получили, что $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на $[a, +\infty)$.

89. Докажем сначала справедливость утверждения на конечном интервале. В силу монотонности и ограниченности функции у неё существуют конечные пределы в граничных точках интервала $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Но тогда непрерывную функцию $f(x)$ можно доопределить до непрерывной на отрезок $[a,b]$.

В случае бесконечного интервала $(-\infty,+\infty)$ аналогично у монотонной непрерывной и ограниченной функции $f(x)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. В силу соответствующего утверждения выше функция является равномерно непрерывной.

90. Достаточно рассмотреть случай двух равномерно непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$. Докажем равномерную непрерывность их суммы. По условию $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_1(\varepsilon) > 0$: $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon/2$ как только $|x''-x'| < \delta_1$, $\forall x',x'' \in (a,b)$, и $\exists\delta_2(\varepsilon) > 0 : |g(x'')-g(x')| < \varepsilon/2$ как только $|x''-x'| < \delta_2$, $\forall x',x'' \in (a,b)$. Выберем $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, тогда равномерная непрерывность суммы функций следует из цепочки неравенств

$$|(f(x'')+g(x''))-(f(x')+g(x'))| \le |f(x'')-f(x')|+|g(x'')-g(x')| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

верных $\forall x',x'' \in (a,b)$ таких, что $|x''-x'| < \delta$, а равномерная непрерывность произведения – из неравенств

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')| =$$
$$= |f(x'')g(x'')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x')g(x')| =$$
$$= |g(x'')(f(x'')-f(x'))+f(x')(g(x'')-g(x'))| \le$$
$$\leqslant |g(x'')||f(x'')-f(x')|+|f(x')||g(x'')-g(x')| < L_1\frac{\varepsilon}{2}+L_2\frac{\varepsilon}{2},$$

выполняемых $\forall x',x'' \in (a,b)$ таких, что $|x''-x'| < \delta$. Здесь $L_1 = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $L_2 = \max\limits_{a\le x\le b} g(x)$ – они существуют по 2-й теореме Вейерштрасса, так как функции можно доопределить до непрерывных на $[a,b]$.

91. В случае сегмента ограниченность функции следует непосредственно из непрерывности равномерно непрерывной функции и 1-й теоремы Вейерштрасса. Пусть теперь функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на интервале (a,b). Тогда её можно доопределить до непрерывной на отрезке $[a,b]$. В результате, по 1-й теореме Вейерштрасса, доопределённая функция ограничена на отрезке $[a,b]$, а значит, и на интервале (a,b), в силу чего функция $f(x)$ также ограничена на (a,b).

92. Действительно, рассмотрим произвольную проколотую окрестность точки x_0 (обозначим её $\dot{U}$) и возьмём $\varepsilon = 1$. Пусть $\delta > 0$ – произвольное число, столь малое, что проколотая $\delta/2$-окрестность точки x_0 (обозначим её $\dot{U}_{\delta/2}$) содержится в $\dot{U}$. Очевидно, что расстояние между любыми двумя точками из $\delta/2$ меньше δ. Выберем какую-нибудь точку x' из $\dot{U}_{\delta/2}$. В силу неограниченности функции $f(x)$ в $\dot{U}_{\delta/2}$ найдётся точка x'' такая, что $|f(x'')| > |f(x')| + 1$. Таким образом, $|x'' - x'| < \delta$, но при этом $|f(x'') - f(x')| \geq |f(x'')| - |f(x')| > 1 = \varepsilon$, что и означает отсутствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ в проколотой окрестности $\dot{U}$.

93. По условию $f(x)$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой. Рассмотрим отрезок $[0, 2T]$. По теореме Кантора функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [0, 2T]$ из неравенства $|x'' - x'| < \delta$ следует неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Возьмём теперь две произвольные точки $x', x'' \in \mathbb{R}$, связанные соотношением $|x'' - x'| < \delta$.

Возможны два варианта.

1) Точки x', x'' лежат в пределах одного отрезка вида $[kT, (k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Точки x', x'' лежат на соседних отрезках: $x' \in [kT, (k+1)T]$, $x'' \in [(k+1)T, (k+2)T]$, $k \in \mathbb{Z}$. Как в первом, так и во втором случае $x' - kT$, $x'' - kT \in [0, 2T]$, и при этом $|(x' - kT) - (x'' - kT)| < \delta$, поэтому $|f(x'') - f(x')| = |f(x'' - kT) - f(x' - kT)| < \varepsilon$, а это и означает, что функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

94. а) Имеем $|f(x'') - f(x')| = 5|x'' - x'| < \varepsilon$, если $|x'' - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$;

б) Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{|x'x''|} < 100 \cdot |x' - x''| < \varepsilon,$$

если $|x'' - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{100}$;

в) Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = |2(\sin x' - \sin x'') - (\cos x' - \cos x'')| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot \left|\sin\frac{x' - x''}{2} \cdot \cos\frac{x' + x''}{2}\right| + 2 \cdot \left|\sin\frac{x' - x''}{2} \cdot \sin\frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 6 \cdot \left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant 3|x' - x''| < \varepsilon,$$

если $|x'' - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

95. Рассмотрим

$$|f(x'') - f(x')| = |x''^2 - x'^2| = |(x'' + x')(x'' - x')| = |x'' + x'||x'' - x'| \leq$$

$$\leq 2\max(|a|, |b|)|x'' - x'|.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём в качестве δ число $\dfrac{\varepsilon}{2\max(|a|, |b|)}$, тогда из справедливости неравенства $|x'_n - x''_n| < \delta$, $\forall x', x'' \in (a, b)$, будет следовать справедливость неравенства $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, что означает равномерную непрерывность функции на данном интервале.

96. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $|f(x'') - f(x')| = |x'^3 - x''^3| = |x' - x''||x'^2 + x'x'' + x''^2| \leqslant$ (обозначим $C = \max(|a|, |b|)$) $\leqslant |x' - x''||x'^2 + |x'||x''| + x''^2| \leqslant |x' - x''| \cdot 3C^2 < \varepsilon$. Если взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3C^2}$, то определение выполняется.

97. Возьмём любые $x', x'' \in (0, 1)$, тогда $|f(x') - f(x'')| = |e^{x'} - e^{x''}| =$ (по теореме Лагранжа) $= |f'(\xi)||x'' - x'| = e^{\xi}|x'' - x'| < e\delta = \varepsilon$, где $x' < \xi < x''$. Таким образом, в качестве δ из определения можно взять ε/e.

98. Возьмём любые $x', x'' \geq 1$, тогда

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \left|\frac{x'' - x'}{x''x'}\right| \leq \left|\frac{x'' - x'}{1 \cdot 1}\right| = |x'' - x'|.$$

Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta \in (0, \varepsilon)$, тогда из неравенства $|x'' - x'| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность функции.

99. Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ имеем: $|f(x') - f(x'')| =$

$$|x' - x'' + (\sin x' - \sin x'')| \leqslant |x' - x''| + 2\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\cos\frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x' - x''| + 2\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant 2|x' - x''| < \varepsilon$$

для всех x', x'', удовлетворяющих $|x'' - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

100. Так как функция нечётная, то достаточно доказать её равномерную непрерывность на полуинтервале $[0, +\infty)$. Рассмотрим

$$|\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''| =$$

(в силу тождества $|\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''| = \operatorname{arctg}\dfrac{x' - x''}{1 + x'x''}$, верного при $x'x'' > -1$, а в данном случае $x'x'' \geqslant 0$, получаем)

$$= \left|\operatorname{arctg}\frac{x' - x''}{1 + x'x''}\right| \leqslant \left|\frac{x' - x''}{1 + x'x''}\right| \leqslant |x' - x''| < \varepsilon$$

при $|x' - x''| < \delta = \varepsilon$.

101. 1) Докажем непрерывность $f(x)$ в любой точке $x_0 \in (0, 1)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{xx_0}\right| \leqslant$$

(так как $|x - x_0| < \delta$, то $-\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$)

$$\leqslant \frac{\delta}{\min(x_0 - \delta, x_0 + \delta)x_0} = \frac{\delta}{(x_0 - \delta)x_0} < \varepsilon,$$

если взять $\delta < \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$.

2) Так как на произвольном $[a, 1)$, где a – сколь угодно малое положительное число, функция является равномерно непрерывной (доопределяется до непрерывной на сегмент $[a, 1]$), то делаем вывод, что нарушаться равномерная непрерывность может лишь в правой окрестности нуля. Поэтому подберём две числовые последовательности, сходящиеся к нулю, например $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{2}{n}$. Заметим, что $|x'_n - x''_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$ (т. е. $|x'_n - x''_n|$ можно сделать меньше любого $\delta > 0$, достаточно взять $n > \frac{1}{\delta}$), однако

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left|n - \frac{n}{2}\right| = \frac{n}{2} \geqslant \frac{1}{2}$$

при любых сколь угодно больших n. Итак, нашлись x'_n, x''_n и нашлось ε_0 такие, что $|f(x'_n) - f(x''_n)|$ остаётся больше ε_0 при любых n. В качестве такого ε_0 можно взять любое $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.

102. Заметим, что на любом отрезке $[a, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться только в правой окрестности точки 0. Поэтому выберем две бесконечно малые последовательности $x'_n = 1/\sqrt{n}$, $x''_n = 1/\sqrt{n+1}$. Так как $|x''_n - x'_n| \to 0$, то $\forall \delta > 0$ найдётся номер $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x''_n - x'_n| < \delta$. Тогда $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1$. Значит, если выбрать $\varepsilon \in (0, 1)$, то $\forall \delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

103. Заметим, что на любом сколь угодно большом отрезке $[a, b]$ функция равномерно непрерывна по теореме Кантора. Поэтому нарушаться равномерная непрерывность в данном случае может лишь в окрестности бесконечно удалённых точек $\pm\infty$. В силу четности функции достаточно рассмотреть окрестность точки $+\infty$. Итак, подберем две числовые последовательности $x'_n = \sqrt{n}$, $x''_n = \sqrt{n+1}$, стремящиеся при $n \to +\infty$ к $+\infty$ такие, что разность соответствующих членов стремится к нулю:

$$|x'_n - x''_n| = \left|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right| = \left|\frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\right| \to 0.$$

В то же время $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

104. Заметим, что на любом отрезке $[a, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться только в правой окрестности точки 0. Выберем две последовательности $x'_n = e^{-n}$, $x''_n = e^{-n-1}$, сходящиеся при $n \to +\infty$ к этой точке. Причём так как $|x'_n - x''_n| = \left|e^{-n} - e^{-n-1}\right| \to 0$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x'_n - x''_n| < \delta$. В то же время модуль разности значений функции в точках этих числовых последовательностей не стремится к нулю, оставаясь равным единице: $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |n - (n+1)| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

105. Поскольку на любом отрезке $[a, 1] \subset (0, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, то равномерная непрерывность может нарушаться лишь в окрестности точки 0. Поэтому выберем две последовательности $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, сходящиеся при $n \to +\infty$ к этой точке. Так как $|x'_n - x''_n| = \left|\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \dfrac{1}{2\pi n}\right| \to 0$, то для любого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x'_n - x''_n| < \delta$.

При этом $|f(x'_n)-f(x''_n)| = |1-0| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

106. Ограниченность очевидна, а непрерывность следует из того, что $\frac{\pi}{x}$ и синус – непрерывные функции своих аргументов. На правом конце интервала функция имеет конечный предел и доопределяется им до непрерывной (и на любом отрезке вида $[a, 1]$, где a – сколь угодно малое положительное число, является равномерно непрерывной). А вот на левом конце интервала предел не существует. Отсюда делаем вывод, что нарушаться равномерная непрерывность может лишь в правой полуокрестности точки $x = 0$. Поэтому подберём две последовательности, сходящиеся к нулю при $n \to +\infty$, из расчёта, чтобы в точках одной из них синус принимал значение 0, а в точках другой, например, значение 1. Итак, пусть $x'_n = \frac{1}{n}$, $x''_n = \frac{2}{2n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$|x'_n - x''_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)} \to 0$$

при $n \to +\infty$, в то время как $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной.

107. Так как на любом сколь угодно большом, но конечном отрезке функция равномерно непрерывна по теореме Кантора, то нарушаться равномерная неперывность может лишь в окрестности бесконечно удалённых точек $\pm\infty$. Выберем две числовые последовательности $x'_n = 2\pi n \to +\infty$, $x''_n = 2\pi n + \frac{1}{2\pi n}$ $\to +\infty$, причём $|x'_n - x''_n| = 1/(2\pi n) \to 0$ при $n \to +\infty$. При достаточно большом n имеем:

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = |x'' \sin x'' - x' \sin x'| =$$

$$= \left|\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) \sin\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) - 2\pi n \sin 2\pi n\right| =$$

$$= \left|2\pi n \sin\frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi n} \sin\frac{1}{2\pi n}\right| = 2\pi n \sin\frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi n} \sin\frac{1}{2\pi n} >$$

$> \dfrac{\sin\frac{1}{2\pi n}}{\frac{1}{2\pi n}} > \frac{1}{2}$, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{2\pi n}}{\frac{1}{2\pi n}} = 1$. В качестве ε можно взять любое число $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Функция не является равномерно непрерывной.

108. Поскольку на любом (сколь угодно большом!) отрезке функция равномерно непрерывна по теореме Кантора, то нарушаться равномерная непрерывность может лишь в окрестности бесконечно удаленных точек $\pm\infty$. Рассмотрим окрестность точки $+\infty$ и подберем две последовательности значений аргумента $x'_n = \sqrt{2\pi n}$, $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, расходящиеся к $+\infty$. Разность их соответствующих членов стремится к нулю:

$$|x''_n - x'_n| = \left|\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n})(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n})}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}}\right| =$$

$$\left|\frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}}\right| \to 0.$$

В то же время $|\sin(x''_n)^2 - \sin(x'_n)^2| = |\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) - \sin 2\pi n| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то $\forall \delta > 0$ найдутся точки x'_n, x''_n такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$, а это и означает, что функция не является равномерно непрерывной.

109. Поскольку на произвольно большом сегменте $[a, b]$ функция непрерывна и по теореме Кантора является равномерно непрерывной, то нарушаться равномерная непрерывность может лишь в окрестностях бесконечно удалённых точек $\pm\infty$. Выберем две последовательности $x'_n = \sqrt[3]{2\pi n}$, $x''_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, расходящиеся к $+\infty$ такие, что

$$|x'_n - x''_n| =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt[3]{2\pi n})(\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^2} + \sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)(2\pi n)} + \sqrt[3]{(2\pi n)^2})}{\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^2} + \sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)(2\pi n)} + \sqrt[3]{(2\pi n)^2}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^2} + \sqrt[3]{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)(2\pi n)} + \sqrt[3]{(2\pi n)^2}} \to 0 \quad \text{при } n \to +\infty,$$

в то время как $|\cos(x_n')^3 - \cos(x_n'')^3| = |\cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) - \cos 2\pi n| = 1$. В качестве ε можно выбрать любое число из интервала $(0,1)$.

110. Да. Так как функция непрерывна на отрезке $[-1,1]$ как суперпозиция непрерывных функций (точки разрыва $x = \pm 2$ не попадают в этот промежуток), то по теореме Кантора это означает равномерную непрерывность функции.

111. Да. Функция непрерывна при $x \in [0,100]$ как суперпозиция непрерывных функций (знаменатель ни в одной точке не обращается в нуль), поэтому равномерно непрерывна по теореме Кантора.

112. Да. Промежуток $[6, 8\frac{2}{3}]$ является областью определения функции, на которой функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, а значит, и равномерно непрерывна по теореме Кантора.

113. Да. После упрощения получаем, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [-1,1]$.

114. Да. При $1 \le x \le 1\frac{1}{4}$ имеем $2 \le 2x \le 2\frac{1}{2}$, поэтому $[2x] = 2$ и $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ – непрерывная на $[1, 1\frac{1}{4}]$ функция, а значит и равномерно непрерывная по теореме Кантора.

115. Нет, знаменатель функции обращается в нуль при $x = 0 \in [-3,2]$, являющейся точкой устранимого разрыва. Функция не является непрерывной на указанном промежутке, следовательно, теорема Кантора не применима.

116. Найдём производную: $(\sin(\cos x))' = \cos(\cos x)(-\sin x)$. Так как $|-\cos(\cos x)\sin x| \le 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то функция равномерно непрерывна.

117. Поскольку $|(\cos^2 x)'| = |2\cos x \cdot (-\sin x)| \le 2$ $\forall x \in (-\infty, 100\pi)$, то функция равномерно непрерывна на этом промежутке.

118. На отрезке $[0,1]$ функция равномерно непрерывна по теореме Кантора, а на промежутке $[1,+\infty)$ её производная $(\sqrt[4]{x})' = 1/(4\sqrt[4]{x^3})$ ограничена: $\left|\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right| \le \dfrac{1}{4}$, и поэтому функция тоже равномерно непрерывна. Из равномерной непрерывности функции на каждом из двух смежных промежутков следует равномерная непрерывность на их объединении.

119. Найдём производную: $(x \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$. В силу алгебраического неравенства $\left|\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ имеем: $\left|\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}\right| \leq |\operatorname{arctg} x| + \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда следует равномерная непрерывность функции на $\mathbb{R}$.

120. Найдём наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$, вычислив коэффициенты: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = -3$. Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$ имеет асимптоту $y = x-3$, а значит, равномерно непрерывна согласно утверждению из п. 8.

121. Функция непрерывна на $[1, +\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{x}\right) = 1$, следовательно, эта функция равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$.

122. Поскольку функция непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2} = 0$, то эта функция равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$, а в силу чётности и на $(-\infty, 0]$. Но тогда функция равномерно непрерывна на объединении этих двух смежных полуинтервалов.

123. Функция $f(x) = |\sin 5x|$ является непрерывной на множестве $\mathbb{R}$ и периодической с периодом $\pi/5$, а значит, согласно утверждению 13, она равномерно непрерывна на этом множестве.

124. Функция $f(x) = 2\sin x - \cos 7x$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и периодической с периодом 14π, а значит, согласно утверждению 13, она равномерно непрерывна на этом множестве.

125. Функция $f(x) = \arcsin(\sin x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и периодической с периодом 2π, а значит, согласно утверждению 13, она равномерно непрерывна на этом множестве.

126. В силу существования конечных пределов

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{\sin x}{x} = \sin 1, \quad \lim_{x\to\pm 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{\sin x}{x} = \sin 1,$$

функцию $f(x)$, непрерывную на каждом из интервалов $(-1, 0)$

и $(0,1)$, можно доопределить этими предельными значениями, соответственно, до функции, непрерывной на сегментах $[-1,0]$ и $[0,1]$. Но тогда доопределённая функция будет равномерно непрерывна на объединении этих смежных сегментов – сегменте $[-1,1]$, выбрасывание трёх точек $x = 0; \pm 1$ не меняет ситуации.

127. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \sin 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Она непрерывна на сегменте $[0,1]$, а значит по теореме Кантора равномерно непрерывна на этом сегменте. Следовательно, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $J_2 = \{x \mid 0 < x < 1\}$.

Аналогично, функция

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = 0, \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{если } -1 < x < 0; \\ -\sin 1, & \text{если } x = -1, \end{cases}$$

непрерывна на сегменте $[-1,0]$, а значит по теореме Кантора равномерно непрерывна на этом сегменте. Следовательно, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $J_1 = \{x \mid -1 < x < 0\}$.

В то же время на объединении $(-1,0) \cup (0,1)$ функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной, так как $\forall\, x'_n \to -0$, $\forall\, x''_n \to +0$, имеем $|x'_n - x''_n| \to 0$, в то время как $f(x'_n) \to f(-0) = -1$, $f(x''_n) \to f(+0) = 1$ при $n \to +\infty$. Поэтому $|f(x'_n) - f(x''_n)| \to 2$, т. е. не может быть меньше любого ε.

128. Найдём производную функции при $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\cos\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(-\sin\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Значит, найдётся $x_0 > 0 : |f'(x)| \leq 1$ при $x \geq x_0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[x_0, +\infty)$ и имеет ограниченную производную на интервале $(x_0, +\infty)$, то в силу утверждения из п. 8

эта функция будет равномерно непрерывной на $[x_0, +\infty)$. Далее, так как существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$, то доопределим функцию в точке $x = 0$ значением 0. Тогда функция (доопределенная) будет непрерывна на $[0, x_0]$, а значит, равномерно непрерывна по теореме Кантора на этом отрезке. Получили, что функция равномерно непрерывна на каждом из двух смежных промежутков, следовательно, она равномерно непрерывна и на их объединении.

129. Разобьём область задания функции на два смежных промежутка: $(-1, +\infty) = (-1, 0] \bigcup [0, +\infty)$ и докажем равномерную непрерывность функции на каждом из них. На полуинтервале $(-1, 0]$ функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, причем существует ее конечный правый предел в точке $x = -1$: $\lim\limits_{x\to-1+0} \left(-x^2 \ln(x^4+1)\right) = -\ln 2$. Поэтому функцию можно доопределить до непрерывной на отрезок $[-1, 0]$, а значит, функция равномерно непрерывна на $(-1, 0]$ согласно утверждению из п. 5. Далее, на втором из промежутков $[0, +\infty)$ функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна и имеет конечный предел при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$. Поэтому по утверждению из п. 9 функция равномерно непрерывна и на этом промежутке. Наконец, по утверждению из п. 6 исходная функция равномерно непрерывна на объединении данных смежных промежутков.

Замечание. На втором из промежутков можно было также объяснить равномерную непрерывность ограниченностью производной: $|(\operatorname{arctg} x)'| = |1/(1+x^2)| \leq 1$.

130. Заметим, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \left(x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)\right) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции x^2 на ограниченную $|\cos\frac{1}{x} - 1| \leq 2$. Рассмотрим функцию $g(x)$, принимающую значение нуль при $x = 0$ и совпадающую с $f(x)$ при $x > 0$. Эта функция непрерывна при $x \in [0, +\infty)$ и имеет конечный предел при $x \to +\infty$:

$$f(x) = x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) = -2x^2 \cdot \sin^2\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\frac{1}{2x}}{\left(\frac{1}{2x}\right)^2} \to -\frac{1}{2}.$$

Согласно утверждению из п. 9 функция $g(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $x \in [0, +\infty)$. Но тогда совпадающая с ней при $x \in (0, +\infty)$ функция $f(x)$ будет равномерно непрерывной на этом интервале.

6 СЕМИНАР: Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя

«Если все люди поумнеют, то ими нельзя будет манипулировать.
Люди не хотят быть манипулируемыми, когда у них есть знания».
Герман Греф, председатель правления Сбера.

6.1 1-е правило Лопиталя: раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$

Рассмотрим задачу нахождения предела

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то говорят, что в точке $x = x_0$ имеется *неопределённость вида* $\frac{0}{0}$. В этом случае данный предел может как не существовать, так и существовать и принимать любое значение (конечное или бесконечное). Вычисление предела в этом случае принято называть *раскрытием неопределённости.*

Ранее мы уже рассматривали различные приёмы раскрытия неопределённостей указанного вида. Теперь познакомимся ещё с одним мощным способом раскрытия двух основных видов неопределённостей при вычислении пределов функций, имеющих производные в окрестности предельной точки. Этот способ известен в анализе под названием *правил Лопитáля.*

Приведённые ниже теоремы принадлежат Лопиталю и Бернулли. Правила Бернулли–Лопиталя – это метод нахождения пределов функций, раскрывающий неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Обосновывающая метод теорема утверждает, что при некоторых условиях предел отношения функций равен пределу отношения их производных[1].

[1]Гийом Франсуа Лопиталь (фр. *Guillaume Francois Antoine*, marquis de

T1 (*1-е правило Лопиталя*). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 ($0 < |x - x_0| < \delta$ или $|x| > \frac{1}{\delta}$), где x_0 – число или символ ∞, и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причём одновременно не обращаются в нуль при $x \neq x_0$:

$$(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0;$$

3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'Hospital, 1661–1704) – французский математик, автор первого учебника по математическому анализу. Способ раскрытия такого рода неопределённостей был опубликован в учебнике «Analyse des Infiniment Petits» 1696 года за авторством Гийома Лопиталя. Сын богатых родителей, маркиз Лопиталь поступил сперва в военную службу, но по слабости зрения вскоре оставил её и посвятил себя наукам. Состоял членом Парижской академии наук, участник учёного кружка Мальбранша. Был женат на Мари-Шарлотт де Ромий де ла Шенелэ (фр. *Marie-Charlotte de Romilley de la Chesnelaye*), тоже занимавшейся математикой. В 1690-х годах занял видное место в школе Лейбница, с новым методом которого его познакомил Иоганн Бернулли (*Johann Bernoulli*, швейцарский математик, 1687-1759) в 1692 во время своего пребывания в Париже в поместье Лопиталя.

Главная заслуга Лопиталя заключается в первом систематическом изложении математического анализа, данное им в сочинении «Анализ бесконечно малых» (1696). В этой книге собраны и приведены в стройное целое отдельные вопросы, разбросанные до того в разных изданиях, а также приводится Правило Лопиталя. В предисловии Лопиталь указывает, что без всякого стеснения пользовался открытиями Лейбница и братьев Бернулли и «не имеет ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на всё, что им угодно». Современников, однако, сильно озадачило то, что Иоганн Бернулли предъявил претензии на всё сочинение Лопиталя целиком.

6.2 2-е правило Лопиталя: раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$

T2 (*2-е правило Лопиталя*). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0, и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причём одновременно не обращаются в нуль в этой окрестности (при $x \neq x_0$);

3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналогичные правила справедливы и для односторонних пределов.

Рассмотрим примеры[1].

Пример 45. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$.

Решение. Убедимся, что все условия 1-го правила Лопиталя выполнены. В самом деле,
1) функции $f(x) = x^x - 1$ и $g(x) = \ln x$ определены и непрерывны в достаточно малой проколотой окрестности точки $x = 1$, и $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$;
2) производные $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ и $g'(x) = \frac{1}{x}$ существуют в этой окрестности и одновременно не обращаются в нуль $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$;
3) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1)}{\frac{1}{x}} = 1$.
Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1. \ \square$$

[1]Буква «л» над знаком равенства $\overset{[\text{л}]}{=}$ означает применение правила Лопиталя.

Пример 46. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-2x^5+1}{x^{15}-2x^6+1}$.

Решение. Убедившись, что имеем неопределённость $\frac{0}{0}$ и проверив, что все условия теоремы выполняются, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-2x^5+1}{x^{15}-2x^6+1}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x^{10}-2x^5+1)'}{(x^{15}-2x^6+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10x^4}{15x^{14}-12x^5}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{0}{3}=0.\ \square$$

Пример 47. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

Замечание 1. Правила Лопиталя являются лишь достаточным условием для существования предела отношения двух бесконечно малых (бесконечно больших) функций, поэтому если предел отношения производных не существует или нарушается какое-либо другое условие применимости этих правил, то это, вообще говоря, ещё не означает, что нет предела отношения исходных величин. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 48. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к пределу $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение. Рассмотрим при $x\to\infty$ две бесконечно большие функции: $f(x)=x+\sin x$ и $g(x)=x$. Предел их отношения, очевидно, существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=1+0=1.$$

В то же время отношение производных дает

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x,$$

а эта функция не имеет предела при $x\to\infty$. Следовательно, для вычисления данного предела правило Лопиталя не применимо. $\square$

Пример 49. [6, №1374(г)] Исследовать возможность применения правила Лопиталя к пределу

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \sin x \cdot \cos x}{(x + \sin x \cdot \cos x)e^{\sin x}}.$$

Решение. Формальное применение правила Лопиталя даёт результат, равный 0. В действительности, этот предел не существует, так как он равен $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1 + \frac{1+\sin x\cdot\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x\cdot\cos x}{x}} \right) e^{-\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\sin x}$ (выражение в скобках стремится к единице). Причина этому кроется в том, что нарушается условие одновременного необращения в нуль производных при $x \to \infty$. Действительно,

$$f'(x) = 2\cos^2 x,\ g'(x) = \cos x \left(2\cos x e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x)e^{\sin x}\right),$$

и при $\cos x = 0$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$, получаем $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = 0$. $\square$

Замечание 2. Правила Лопиталя иногда приходится применять много раз подряд, пока не получится предел, значение которого либо очевидно, либо может быть вычислено каким-либо известным способом.

Пример 50. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя последовательно 3 раза – до тех пор, пока не пропадёт неопределённость:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}. \square$$

Пример 51. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2}$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{2x} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}}{2} = \frac{5}{4}. \square$$

Замечание 3. При всех своих достоинствах правила Лопиталя не являются эффективными во всех случаях, когда применимы. К недостаткам этого метода можно отнести большое количество и рутинность вычислений, которые возникают в некоторых случаях, например,

Пример 52. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5}$.

Решение. Очевидно, вычисление уже только первых двух производных приводит к большим выкладкам, а дифференцировать здесь нужно, видимо, 5 раз. В такой ситуации надо пользоваться другими, более удобными средствами вычисления пределов, например – разложениями функций по формуле Тейлора. □

6.3 Другие виды неопределённостей: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0

1. Неопределённости вида $0\cdot\infty$, т. е. вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, a – действительное число или символ бесконечности, сводятся либо к неопределённости $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

либо к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Пример 53. Найти предел $\lim\limits_{x\to +0} x^\mu \ln x$ $(\mu > 0)$.

Решение. Сведём неопределённость $0\cdot\infty$ к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to +0} x^\mu \ln x = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu\cdot x^{-\mu-1}} = -\frac{1}{\mu}\cdot\lim_{x\to +0} x^\mu = 0.$$

Пример 54. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

Решение. Сведём неопределённость $0 \cdot \infty$ к неопределённости $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)} =$$

(т. к. $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$)

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}. \ \square$$

2. Неопределённости вида $\infty - \infty$, т. е. вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \lim\limits_{x\to a}g(x) = \infty$, a – действительное число или символ бесконечности, в общем случае могут быть сведены к неопределённостям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, например

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

В зависимости от ситуации может оказаться проще привести дроби к общему знаменателю:

Пример 55. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}. \ \square$$

В случае с радикалами, как мы знаем, бывает эффективным домножение на сопряжённое выражение. Так, в следующем примере этот приём приводит к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

Пример 56. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Неопределённости вида 1^{∞} уже рассматривались ранее. Для раскрытия данного типа неопределённостей, в частности, применялся способ, позволяющий с помощью 2-го замечательного предела свести данный вид неопределённости к неопределённости $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)^{g(x)}\right) \overset{[1^{\infty}]}{=} \lim_{x\to x_0} \left(\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{(f(x)-1)g(x)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

4. Неопределённости вида 0^0, ∞^0, 1^{∞} сводятся в общем случае к неопределённости $0 \cdot \infty$ при помощи перехода к экспоненте в основании степени $f(x)^{g(x)} = e^{\,g(x)\cdot \ln f(x)}$.

Пример 57. Найти предел $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{[\text{Л}]}{=}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1. \ \square$$

Пример 58. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)} \overset{[0\cdot\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} \overset{[\text{Л}]}{=}$
$= e^0 = 1.$ $\square$

6.4 Задачи

Используя 1-е правило Лопиталя, вычислить пределы с неопределённостями вида $\frac{0}{0}$:

№131. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$;

№132. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$;

№133. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

№134. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$;

№135. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$;

№136. [6, № 1330] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$;

№137. [6, № 1359] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

Используя 2-е правило Лопиталя, вычислить пределы с неопределённостями вида $\frac{\infty}{\infty}$:

№138. [6, № 1336] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$;

№139. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\sqrt{x^2+1}}$;

№140. [6, № 1322] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

№141. [6, № 1368(б)] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

Используя 2-е правило Лопиталя, доказать, что показательная функция на бесконечности растет быстрее, а логарифмическая – медленнее, чем степенная:

№142. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$ $(a>1, n>0)$.

№143. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^n}=0$ $(a>1, n>0)$.

Комбинируя различные способы, раскрыть неопределён-

ности разных видов, сведя к неопределённостям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и вычислить пределы:

№144. [6, № 1340] $\lim\limits_{x\to 1-0}(\ln x\cdot\ln(1-x))$;

№145. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$;

№146. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\ln x}$;

№147. $\lim\limits_{x\to +0}(x+2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$;

№148. $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{2x}$;

№149. [6, № 1343] $\lim\limits_{x\to +0} x^{x^x-1}$;

№150. [6, № 1344] $\lim\limits_{x\to +0}\left(x^{x^x}-1\right)$;

№151. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$;

№152. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

№153. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)$;

№154. [6, № 1356] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$;

№155. [6, № 1354] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

№156. [6, № 1373(2)] Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{если } x\neq 0;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

№157. $\lim\limits_{x\to +0}(x^{\mu}\ln x)$ $(\mu>0)$;

№158. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)e^x$;

№159. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

№160. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$;

№161. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

№162. [6, №1351] $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

№163. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

№164. [6, №1363(г)] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

№165. [6, №1364] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

№166. [6, №1348] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

№167. [6, №1363(а)] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

№168. [6, №1373] Доказать, что если для функции $f(x)$ существует $f''(x)$, то

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Показать, что правила Лопиталя не применимы, и вычислить пределы без их использования:

№169. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3\sin x}{x+4\cos x}$;

№170. [6, №1374(а)] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

№171. [6, №1374(б)] $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

№172. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}}$;

№173. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (пример проф. В.Н. Депутатова).

№174. [6, №1374(в)] Исследовать возможность применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}.$$

№175. Исследовать возможность применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}.$$

6.5 Ответы и решения

131. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$

132. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a.$

133. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$

134. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{4x^2}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{8x}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{8}=\frac{9}{8}.$

135. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1}=\frac{1}{6}.$

136. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}\overset{[\text{л}]}{=}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=-2.$$

137. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}\overset{[\text{л}]}{=}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\Big(\frac{1}{x}\ln(1+x)\Big)'\right)=(\text{так как } e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e)=$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}=$$

$$(\text{так как } x+1\to 1)=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2}\overset{[\text{л}]}{=}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{e}{2}.$$

138. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon\cdot x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon\cdot x^\varepsilon}=0.$

139. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln\sqrt{x^2+1}}\overset{[\text{л}]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1.$

140. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos 3x} =$

$$-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \overset{[\text{л}]}{=} -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

141. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln^2 x}}{e^{x\ln\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^2 x - x\ln\ln x\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)} = e^{-\infty} = 0,$$

так как $\dfrac{\ln^2 x}{x} \to 0$, $\ln\ln x \to +\infty$.

142. Применим 2-е правило Лопиталя несколько раз

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} \overset{[\text{л}]}{=} \ldots$$

– до тех пор, пока показатель степени у x в числителе не станет отрицательным, после этого неопределённость исчезает и становится очевидно, что предел равен нулю.

143. Применим один раз 2-е правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^n} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln a}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n \ln a} = 0.$$

144. $\lim\limits_{x\to1-0} (\ln x \cdot \ln(1-x)) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim\limits_{x\to1-0} \frac{\ln(1-x)}{\ln^{-1} x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}$

$$\overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to1-0} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to1-0} \frac{x\cdot\ln^2 x}{1-x} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to1-0} \frac{\ln^2 x + x\cdot(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{-1} = 0.$$

145. Имеем

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x \ln x)} \overset{[0\cdot\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}} = (\cos x \to 1) = e^{-\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}} =$$

$$(\sin x \sim x) = e^{-\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2}{x}} = e^0 = 1.$$

146. Имеем

$$\lim_{x\to1+0}(x-1)^{\ln x} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to1+0}\ln x\ln(x-1)} \overset{[0\cdot\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to1+0}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}} \overset{[Л]}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1+0}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x(\ln x)^2}{x-1}} = e^{-\lim\limits_{x\to1+0}\frac{(\ln x)^2}{x-1}} \overset{[Л]}{=} e^{-\lim\limits_{x\to1+0}\frac{2\ln x}{x}} =$$

$$= e^0 = 1.$$

147. Имеем

$$\lim_{x\to+0}(x+2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(x+2\sqrt{x})}{\ln x}} \overset{[Л]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}+1}{2+\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

148. Имеем

$$\lim_{x\to+0}(\arcsin x)^{2x} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}2x\ln(\arcsin x)} = e^{2\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{x}}} \overset{[Л]}{=}$$

$$= e^{2\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-2\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2}{\arcsin x}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-2\cdot0\cdot1} = 1.$$

149. Имеем

$$\lim_{x\to+0}x^{x^x-1} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x} \overset{[0\cdot\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^x-1}{(\ln x)^{-1}}} \overset{[Л]}{=}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^x(\ln x+1)}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}}} = (x^x\to1) = e^{-\lim\limits_{x\to+0}(x(\ln x+1)\ln^2 x)} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to+0}(x\ln^3 x+x\ln^2 x)} = e^0 = 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -3\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{[\text{л}]}{=}$

$$= -3\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 6\lim_{x\to+0}(x\ln x) = 0.$$

150. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{x^x}-1\right) \overset{[0^{0^0}]}{=} \lim\limits_{x\to+0}(e^{x^x\ln x}-1) = e^{\lim\limits_{x\to+0} x^x\cdot\lim\limits_{x\to+0}\ln x}-1 =$

(так как $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$, $\lim\limits_{x\to+0}\ln x = -\infty$, то показатель степени у экспоненты стремится к $-\infty$, неопределённость отсутствует, предел вычисляется однозначно и получаем) $= e^{-\infty}-1$ $= 0-1 = -1$.

151. Имеем

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{2-x}{x^2-4} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

152. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x} = 0.$$

153. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$,

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

154. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{x\cos x+\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{x\cos x+\sin x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x-x\sin x+\sin x} = 0.$$

155. Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

156. Заметим, что функция непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2}$ (см. предыдущую задачу). Далее, по определению производной в точке $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x - 1)} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2e^x} \overset{[\text{л}]}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x - 1) + 2x^2e^x + 8xe^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x - xe^x}{12e^x + 12xe^x + 2x^2e^x} = -\frac{1}{12}.$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = -\frac{1}{12}$.

157. Имеем

$$\lim_{x\to +0}(x^\mu \ln x) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \lim_{x\to +0} \frac{1}{-\mu x^{-\mu}} = 0.$$

158. Имеем

$$\lim_{x\to +\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)e^x \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{-x}} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{-e^{-x}} =$$

$$= 2\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1 + x^2} = +\infty.$$

159. Имеем $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}} \overset{[\text{л}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1}} = e^0 = 1.$

160. Имеем

$$\lim_{x\to +\infty}(x + 2^x)^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x}} \overset{[\text{л}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+2^x \ln 2}{x+2^x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2^x} + \ln 2}{\frac{x}{2^x} + 1}} = e^{\ln 2} = 2.$$

161. Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\overset{[\infty^0]}{=}e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)}\overset{[0\cdot\infty]}{=}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\frac{1}{\cos x}}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}}{-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=e^0=1.$$

162. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}\overset{[\infty^0]}{=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}}\overset{[\text{Л}]}{=}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2x+1}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)}.$$

Применяя тождество $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$ при $\alpha=\dfrac{2\pi x}{2x+1}$, получим: $\sin\dfrac{2\pi x}{2x+1}=\sin\dfrac{\pi}{2x+1}$, поэтому

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)}=e^{1\cdot 0}=1.$$

163. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

164. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-x}{x^3}}\overset{[\text{Л}]}{=}$

$$\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

165. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

166. Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} 2x\ln(\operatorname{tg} x))} =$

$$e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}} \overset{[\text{Л}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}}} = \left(\text{так как } \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\to 2\right)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\sin^2 2x)} = e^{-1}.$$

167. Пусть $t = \arcsin x \;\Rightarrow\; x = \sin t$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{1}{\sin^2 t}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t}{\sin t}}{\sin^2 t}} \overset{[\text{Л}]}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}\left(\frac{t}{\sin t}\right)'}{2\sin t\cos t}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t - t\cos t}{t\sin^2 t}} \overset{[\text{Л}]}{=} e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\sin t}{\sin^2 t + 2t\sin t\cos t}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t + 2t\cos t}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}+2\cos t}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

168. По правилу Лопиталя (x – параметр) имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \overset{[\text{Л}]}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+f(x-h)-2f(x))'_h}{(h^2)'_h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} =$$

(второй раз правило Лопиталя применять нельзя, поступим иначе)

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} + \frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(f''(x)+f''(x)) = f''(x).$$

Замечание. Двукратное применение правила Лопиталя здесь, вообще говоря, неправомерно, т. к. из того, что $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, не вытекает, что $f(x)$ дважды дифференцируема в точках $x-h$ и $x+h$.

169. Здесь имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, но предел отношения производных $\dfrac{2+3\cos x}{1-4\sin x}$ не существует, потому что не существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$. Предел можно вычислить так: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3\sin x}{x+4\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3\frac{\sin x}{x}}{1+4\frac{\cos x}{x}}=2.$

170. Все условия применимости правила Лопиталя выполнены, кроме одного: не существует предел отношения производных:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

В то же время предел легко вычисляется:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

171. Предел легко вычисляется без правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$. А вот правило Лопиталя здесь не применимо, т. к. не существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

172. В данном «искусственном» примере бездумное применение правила Лопиталя приводит к бесконечному повторению-зацикливанию:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{4e^{2x}}\overset{[\text{л}]}{=}\ldots$$

С другой стороны, после сокращения дроби становится очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

173. Не существует. Формальное применение правила Лопиталя приводит к «зацикливанию»:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{[\text{л}]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{[\text{л}]}{=}\ldots$$

Задача решается следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Этот предел равен 1 при $x\to+\infty$, но он же равен (-1) при $x\to-\infty$, что противоречит единственности предела и доказывает его несуществование.

174. Не применимо. Здесь нарушено требование одновременного необращения в нуль производных при $x\to+\infty$. Как раз при $x=\pi k$ $(k=0,1,2,...)$ $(f'(x))^2+(g'(x))^2=0$, так как $f'(x)=\sin x(-5e^{-2x}-2x\sin xe^{-x^2}+2\cos xe^{-x^2})$, $g'(x)=\sin x(-2e^{-x})$.

175. Имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x\to+\infty$. Применим формально правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\cos 2x}{(2+2\cos 2x)e^{\sin x}+(2x+\sin 2x)e^{\sin x}\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos^2 x}{e^{\sin x}(4\cos^2 x+(2x+\sin 2x)\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos x}{e^{\sin x}(4\cos x+2x+\sin 2x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\frac{\cos x}{x}}{e^{\sin x}\left(1+\frac{4\cos x+\sin 2x}{x}\right)}=0.$$

Однако предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует: рассмотрим две последовательности аргументов $\{x_n'\}=\{2\pi n\}$ и $\{x_n''\}=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$. Тогда $x_n'\to+\infty$ при $n\to+\infty$, $x_n''\to+\infty$ при $n\to+\infty$; при этом

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n')}{g(x_n')}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+4\pi n}{4\pi n}=1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n'')}{g(x_n'')}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\pi+4\pi n}{(\pi+4\pi n)\cdot e}=\frac{1}{e}.$$

Правило Лопиталя здесь не применúмо, поскольку одним из условий теоремы является условие отличия от нуля производной функции $g(x)$ в некоторой окрестности точки a; в данном случае $g'(x)$ обращается в 0 в точках вида $\frac{\pi}{2}+\pi n$, которые есть в любой окрестности точки $+\infty$.

7 СЕМИНАР: Формула Тейлора

Илон Маск выразил опасение, что ИИ может стать "бессмертным диктатором", от которого никто не убежит. История, по словам бизнесмена, знает таких диктаторов как Гитлер и Муссолини, но они были смертными, искусственный же интеллект создаст постоянную структуру угнетения.

Статья «В Google обратились к тёмной стороне искусственного интеллекта», 2020 г.

Домашнее задание (из данного пособия): 176, 177, 181, 183–186, 188, 193, 194, 196–199, 208, 209, 211, 214, 218, 220.

7.1 Понятие многочлена Те́йлора, остаточного члена

Рассмотрим вопрос о приближении функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 алгебраическим многочленом n-ой степени $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n$. Естественно предположить, что чем больше производных, включая производную нулевого порядка, совпадают у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции аппроксимируют друг друга в окрестности этой точки. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что любой многочлен $P_n(x)$ в произвольной точке x представим в виде разложения по целым неотрицательным степеням $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если дана функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 все производные до порядка n включительно, то всегда можно выписать многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (1)$$

производные которого до порядка n включительно в точке x_0 совпадают с производными соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке x_0. Алгебраический многочлен, заданный соотношением (1), называется *многочленом Те́йлора* порядка n функции $f(x)$ в точке x_0. Многочлен назван в честь Брука Тейлора[1].

Обозначим через $R_n(x_0, x) = f(x) - P_n(x)$ величину уклонения многочлена $P_n(x)$ от функции $f(x)$ в точке x_0. Она называется *n-ым остатком*, или *n-ым остаточным членом*, формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0, x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x_0, x). \tag{2}$$

Величина остаточного члена определяет точность аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности x_0. Отметим, что формулу Тейлора при $x_0 = 0$ часто называют *формулой Макло́рена*[2].

7.2 Локальная формула Те́йлора. Формы остаточного члена

Формула Тейлора используется при доказательстве большого числа теорем в дифференциальном исчислении. По формуле Тейлора можно раскладывать функции как одной, так и нескольких переменных[3]. В следующей теореме приведены условия, достаточные для того, чтобы функцию одной действительной переменной можно было приблизить в окрестности заданной точки многочленом Тейлора (с определённой точностью).

[1]Б. Тейлор (англ. *Brook Taylor*, 1685–1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества. Вывел в 1712 общую формулу для разложения функций в степенны́е ряды.

[2]Ко́лин Макло́рен (англ. *Colin Maclaurin*, 1698–1746) – шотландский, английский математик.

[3]Функции многих переменных обычно изучаются во втором семестре.

T1 (*локальная формула Тéйлора*). Пусть: 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$-го порядка включительно: $f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)$; 3) в точке x_0 существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда всюду в указанной окрестности справедливо представление (2).

Замечание 1. При указанных условиях представление (2) единственно.

Замечание 2. Существуют различные представления *n-го остаточного члена*, в их числе:

• $R_n(x_0, x) = o((x - x_0)^n)$ – остаточный член в асимптотической форме (при $x \to x_0$), или в форме Пеáно[1].

При более сильных ограничениях, когда функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производную $(n+1)$-го порядка и $p > 0$ – произвольно, найдётся точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая что

• $$R_n(x_0, x) = \left(\frac{x - x_0}{x - \xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= (1-\theta)^{n+1-p} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!\,p} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

где $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$ – остаточный член в форме Шлёмильха–Рóша[2].

Полагая в нём $p = n+1$, получаем остаточный член в форме Лагранжа[3]:

• $R_n(x_0, x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_1(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$, где $0 < \theta_1$ < 1;

[1] Джузеппе Пеано (итал. *Guiseppe Peano*, 1858-1932) – итальянский математик.

[2] Оскар Ксавер Шлёмильх (нем. *Oskar Xawer Schlömilch*, 1823–1901) – немецкий математик, член Саксонской Академии наук.

[3] Жозеф Луи Лагранж (фр. *Joseph Louis Lagrange*, 1736–1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером – лучший математик XVIII века.

а полагая $p = 1$, получаем остаточный член в форме Коши[1]:

- $R_n(x_0, x) = (1-\theta_2)^n \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_2(x-x_0))}{n!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$,

где $0 < \theta_2 < 1$.

7.3 Ряд Тейлора (Маклорена). Разложение функций в степенны́е ряды

Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, тогда степенно́й ряд[2]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется ***рядом Те́йлора*** функции $f(x)$ в точке x_0, а $f(x)$ называется производящей функцией этого ряда.

В случае $x_0 = 0$ ряд называется также ***рядом Макло́рена***.

Замечание. Приведём несколько определений из теории степенных рядов. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ называют ***сходящимся*** в точке x, если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. При этом предел $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ называется ***суммой ряда*** в точке x, а совокупность всех значений x, при которых ряд сходится, называется ***областью сходимости*** степенного ряда. В области сходимости сумму ряда можно представить в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма, а $R_n(x)$ – n-й остаток ряда.

Область сходимости степенного ряда имеет вид интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ – конечного или бесконечного – с центром в точке x_0, где число R называют радиусом сходимости[3]. Позже при изуче-

---

[1]Огюсте́н Луи Коши́ (фр. *Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857) – великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

[2]Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, где коэффициенты ряда $a_n \in \mathbb{R}$, центр $x_0 \in \mathbb{R}$.

[3]Радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формуле Коши-Адамара: $\dfrac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

нии степенных рядов будет показано, что любой степенной ряд внутри своего интервала сходимости можно почленно дифференцировать (интегрировать) любое число раз, причём продифференцированный (проинтегрированный) ряд будет сходиться к производной (первообразной) суммы ряда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad \int S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ряд Тейлора является степенным рядом, поэтому естественно возникает вопрос, всегда ли в своей области сходимости этот ряд сходится именно к производящей функции, т. е. справедливо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3}$$

(в этом случае говорят, что функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора). Ответ на этот вопрос дают две теоремы.

T2 (*необходимое условие разложимости функции в степенной ряд*). Если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то она имеет непрерывные производные всех порядков внутри интервала сходимости.

Следствие. Разложение функции в степенной ряд единственно.

В самом деле, пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$. Пользуясь тем, что степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать произвольное число раз, найдём коэффициенты a_n, $n = 0, 1, 2, ...$ Для этого подставим в последнее равенство $x = x_0$ и получим $a_0 = f(x_0)$. Продифференцировав равенство один раз $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ и подставив в него $x = x_0$, найдём $a_1 = f'(x_0)$. Дифференцируя последовательно и подставляя каждый раз x_0 вместо x, найдём коэффициенты $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$, $a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$ и т. д. Таким образом, разложение функции в степенной ряд является рядом Тейлора этой функции.

Однако условие существование непрерывных производных всех порядков внутри интервала сходимости *не является достаточным* для сходимости ряда Тейлора *к производящей функции* (а не к какой-либо другой): существуют бесконечно дифференцируемые функции, ряд Тейлора которых сходится, но при этом отличается от функции в любой окрестности x_0. Коши предложил следующий пример.

Пример 59. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет все производные в нуле равными нулю: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ (остальные производные вычисляются аналогично). Поэтому коэффициенты ряда Тейлора в точке $x_0 = 0$ равны нулю: $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ... \equiv 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}}$. В самой точке $x_0 = 0$ ряд сходится (к значению функции), но при этом в любой окрестности этой точки такой ряд по-прежнему сходится к нулю, а вовсе не к значению функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$.[1] □

Т3 (*необходимое и достаточное условие разложимости*). Бесконечно дифференцируемая на интервале сходимости функция раскладывается в ряд Тейлора тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора стремится к нулю при $n \to +\infty$:

$$R_n(x_0, x) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Покажем, что для разложимости в степенной ряд бесконечно дифференцируемой функции на интервале сходимости достаточно, чтобы все её производные были ограничены в совокупности: $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$ для всех n и всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Действительно, тогда при $n \to +\infty$

$$|R_n(x_0, x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{C}{(n+1)!} R^{n+1} \to 0.$$

[1] В связи с этим был даже выделен специально класс «хороших» функций, которые назвали *аналитическими*. По определению, аналитическая функция (действительного переменного) – это функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области сходимости.

Замечание 1. Функцию, разложимую в ряд Тейлора, можно приблизить многочленом Тейлора с любой степенью точности, для этого надо лишь взять достаточное количество членов разложения.[1]

Замечание 2. Ряд Тейлора можно представить в дифференциальной форме

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + ... + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + ...,$$

где $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции[2] в точке x_0:

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx^n = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

7.4 Таблица разложений элементарных функций в степенные ряды

Приведём таблицу разложений основных элементарных функций в степенные ряды по целым неотрицательным степеням x (с указанием их области сходимости):

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x \in \mathbb{R};$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\ x \in \mathbb{R};$
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1, 1];$

[1] Поэтому исследование свойств функции $f(x)$ в области сходимости её ряда Тейлора часто сводят к более простой задаче исследования поведения её многочлена Тейлора, причём чем выше степень многочлена, тем точнее аппроксимация. А если учесть, что равенство (3) внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать, то область применимости рядов Тейлора существенно расширяется.

[2] Можно сказать, что формула Тейлора есть не что иное как доведённая до логического завершения известная формула для приращения функции (или формула конечных приращений Лагранжа).

- $(1+x)^m = 1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots =$
$= 1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ – биномиальное разложение,[1] $m\in\mathbb{R}$, $x\in(-1;1)$ (сходимость ряда на концах интервала зависит от m); в частности,

при $m=-1$: $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots;$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots;$$

при $m=\dfrac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2\cdot 4}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}x^n+\ldots;$$

при $m=-\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

$$+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots;$$

- $\operatorname{tg} x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, где B_{2n} – числа Бернулли;
- $\operatorname{arctg} x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1;1)$;
- $\arcsin x = x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{x^7}{7}+\ldots =$

$$= x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)},\quad x\in[-1,1].$$

- $\operatorname{sh} x = x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$;

[1] При $m\in\mathbb{N}$ получаем, в частности, бином Ньютона.

- $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \;\; x \in \mathbb{R};$
- $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1},$

$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, где B_{2n} – числа Бернулли.

Пример 60. Рассмотрим, например, вопрос о разложении функции $\arcsin x$ в ряд по целым неотрицательным степеням x. Непосредственное составление ряда Тейлора здесь было бы затруднительно ввиду весьма громоздких выражений последовательных производных $\arcsin x$. Использование биноминального ряда при $m = -0,5$ позволяет обойти эту трудность. Воспользуемся тем, что разложить в степенной ряд производную арксинуса – более простая задача. Возьмём готовое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

и, заменив в нём x на $(-x^2)$, получим разложение

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до x, где $-1 < x < 1$, находим искомое разложение:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!! \, x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}. \, \square$$

7.5 Таблица разложений элементарных функций по формуле Маклорена. Формула Тейлора на промежутке

Если функция не является бесконечно дифференцируемой, но удовлетворяет в окрестности точки $x_0 = 0$ условиям формулы Тейлора, то для неё можно выписать в окрестности этой точки локальную *формулу Макло́рена* с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n).$$

С помощью этой формулы получаем в окрестности нуля уже известные разложения элементарных функций:

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n);$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n);$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot ... \cdot(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n});$
- $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{x^7}{7} + ...$

$$... + \frac{(2n-1)!!\ x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + o(x^{2n+2}).$$

Приведём в заключение теорему о разложении функции по формуле Тейлора на конечном отрезке.

Т4 (*формула Те́йлора на промежутке*). Пусть: 1) функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, b]$; 2) $f(x)$ имеет на $[x_0, b]$ непрерывные производные $f'(x), ..., f^{(n)}(x)$; 3) на интервале (x_0, b) существует конечная производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого $x \in [x_0, b]$ и любого $p > 0$ найдётся такое число $\theta \in (0, 1)$, что справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x). \qquad (4)$$

Замечание. Разложение по формуле Тейлора можно использовать для вычисления высших производных в точке разложения (без непосредственного дифференцирования).

Способы разложения функций по формуле Тейлора. Из сказанного выше следует, что существуют два основных способа разложения функций по формуле Тейлора. Первый способ – это использование напрямую формулы Тейлора, нахождение производных до нужного порядка включительно и т. д. Второй подход, убыстряющий решение и часто оказывающийся более эффективным, – это использование готовых (стандартных) разложений элементарных функций, сведение задачи к ним. Кроме этого, используют любую возможность преобразовать функцию к виду, более удобному для последующего разложения.

Чтобы сравнить эти подходы, оценить достоинства и недостатки каждого из них, необходимо решить не одну задачу. Тем не менее, продемонстрируем разные походы на следующем простом примере.

Пример 61. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ до членов 3-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $x = 0$.

Решение. *1-й способ* (стандартный, по формуле Маклорена). В окрестности точки $x = 0$ имеем разложение:

$$\sin^2 x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4 + o(x)^4.$$

Вычислим значения функции и производных до 4-го порядка включительно:

$$f(0) = \sin^2 0 = 0, \quad f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x\big|_{x=0} = 0,$$
$$f''(x) = 2\cos 2x\big|_{x=0} = 2, \quad f'''(x) = -4\sin 2x\big|_{x=0} = 0,$$
$$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x\big|_{x=0} = -8.$$

Подставляя в исходное выражение, получаем искомое разложение:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Заметим, что поскольку функция чётная, то ожидаемо она раскладывается исключительно по чётным степеням x.

2-й способ (сведение к стандартным разложениям). Воспользовавшись разложением синуса в окрестности нуля, получим

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + o^2(x^3) - 2x \cdot \frac{x^3}{3!} + 2x \cdot o(x^3) +$$

$$+2 \cdot \frac{x^3}{3!} \cdot o(x^3) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

т. к. все остальные слагаемые есть $o(x^4)$.

3-й способ. Преобразуя функцию по формуле понижения степени $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и раскладывая её затем по формуле Маклорена, приходим к тому же результату:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right)\right) =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \ \square$$

Сколько членов разложения выписывать? При решении задач с помощью формулы Тейлора (например, при вычислении пределов функций) часто возникает вопрос, сколько слагаемых удерживать в разложении, если это количество не задано по условию. Конечно, это должно быть согласовано с условиями задачи, и это важный вопрос. Если вы выпишете слагаемых больше, чем нужно, вы увеличите сложность вычислений. Ну, а если возьмёте слагаемых меньше, чем необходимо для корректного решения задачи, то просто получите неверный ответ. Это надо помнить.

Пример 62. [6, № 475] Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Известны стандартные разложения тангенса и синуса в окрестности точки $x = 0$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Можно было выписать и большее количество членов, но сколько на самом деле необходимо? Давайте порассуждаем. Ясно, что раскладывать функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ нужно с одинаковой «точностью»: либо включая члены только с x и на этом остановиться, а возможно, по

x^3 включительно, или даже удерживать все члены до 5-го порядка? Проанализируем эти варианты.

Предположим, мы подставим самые «короткие» разложения $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $\sin x = x + o(x)$, тогда предел примет вид

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} =?$$

Получили неопределённость $0 \cdot \infty$, не очень ясно, что делать далее.

Если мы удержим в разложениях все члены по 3-ю степень включительно, то получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Мы нашли значение предела, это верное решение.

Допустим теперь, что мы бы взяли более подробное разложение, включая 5-е степени:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)}{x^3}.$$

Так решать можно, но выкладки сложнее, а зачем всё усложнять? Видно же, что раскладывать функции в числителе дроби надо до такой степени точности, чтобы начало проявляться различие между этими функциями. В данном примере, члены с 1-й степенью совпадают, а с 3-й уже отличаются. Поэтому раскладывать по Тейлору надо до 3-й степени включительно. К тому же в знаменателе тоже стоит 3-я степень x.

Вывод: надо было раскладывать с самого начала обе функции до 3-й степени включительно. Это оптимальное решение. $\square$

Рассмотрим ещё один предел.

Пример 63. Найти предел $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

Этот предел несложно находится домножением на сопряжённое выражение. Решим теперь эту задачу с помощью формулы Тейлора.

Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{3}{x}}-x\right)$$

и воспользуемся разложением $\sqrt{1+t}=1+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+o(t^2)$, верным при $t\to 0$. Положим $t=\frac{3}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$. Получим

$$\sqrt{1+\frac{3}{x}}=1+\frac{3}{2x}-\frac{9}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Подставим полученное разложение по степеням $\frac{1}{x}$ в исходный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{3}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{3}{2x}-\frac{9}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-x\right)=$$

$= 3/2.$ □

Наконец, вычислим предел, который мы оставили на прошлом семинаре нерешённым, так как правило Лопиталя для него применять было неэффективно. Решим задачу с помощью формулы Маклорена.

Пример 64. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^5}$.

Решение. Воспользуемся разложениями (если нет под рукой, их всегда можно найти по формуле Маклорена). При этом выписываем члены разложения до 5-й степени включительно, поскольку в знаменателе дроби видим x^5:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5),\quad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5),$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5).$$

Тогда, подставляя в предел, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\cdot\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)\right)-\operatorname{arctg}x}{x^5}=$$

(раскрывая скобки, подставляя арктангенс и упрощая, получим)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5\left(\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{3}{40} - \dfrac{1}{5}\right) + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}. \ \square$$

7.6 Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Оценки погрешностей

Формула Тейлора – основное вычислительное средство анализа, а остаточный член в форме Лагранжа позволяет оценить погрешность приближённых вычислений. В основе вычислений лежит приближённая формула

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

погрешность которой оценивается абсолютной величиной остатка после n-го члена, т. е. функции

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$. Если, например, вычисляется значение функции $f(x)$ на отрезке $[0, b]$, на котором производная $(n+1)$-го порядка ограничена по модулю $|f^{(n+1)}(x)| \leq C$, то для величины остатка имеем оценку

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{C \cdot b^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример 65. [6, № 1397(а)] Вычислить число e с точностью до 10^{-4}.

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора для e^x на отрезке $[0, 1]$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{при } \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и рассмотрим абсолютную величину отклонения (где $\xi \in (0, 1)$):

$$\left|e^x - 1 - x - ... - \frac{x^n}{n!}\right| = |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}x^{n+1} =$$

$$= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4},$$

откуда находим $n \geqslant 7$. Возьмём $n = 7$ и $x = 1$, тогда

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{7!} \approx 2,7182... \ \square$$

7.7 Задачи

Решить задачи, находя производные нужных порядков и используя непосредственно формулу Тейлора для данной функции:

№176. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{3}$ до членов 5-го порядка включительно.

№177. Разложить функцию $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно.

№178. Разложить функцию $f(x) = e^{x^2}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ до членов 4-го порядка включительно.

Решить задачи, используя готовые (стандартные) разложения элементарных функций по формуле Тейлора:

№179. Найти разложение функции $f(x) = \cos^2 x$ по целым неотрицательным степеням переменной x (по формуле Маклорена) до члена с x^{2n} включительно и остаточным членом в форме Пеано.

№180. Найти разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ по формуле Маклорена до члена с x^n включительно.

№181. [6, №1381] Найти разложение функции $f(x) = e^{2x-x^2}$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^5 включительно.

№182. Найти разложение функции $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ в окрестности точки $x = 0$ до членов 3-го порядка включительно.

№183. [6, №1385] Найти разложение функции

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 включительно.

№184. [6, №1387] Найти разложение функции

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^6 включительно.

№185. [6, №1391] Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 1)$ разложить по целым неотрицательным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

№186. [6, №1377] Написать разложение функции

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^4 включительно. Чему равно $f^4(0)$?

№187. Разложить функцию $f(x) = \sin(1-\cos x)$ по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно.

№188. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{e^{3x^2}}{2+x^2}$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№189. Найти разложение функции $f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$ по формуле Маклорена (в окрестности точки 0) до членов 3-го порядка включительно.

№190. Найти разложение функции $f(x) = \ln(\cos(x^2))$ по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно.

№191. Найти разложение функции $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x}{x}}$ по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно.

№192. Найти разложение функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ в окрестности нуля до членов 2-го порядка включительно.

№193. [6, №1382] Написать разложение по целым неотрицательным степеням x функции $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4.

Используя разложения по формуле Тейлора, вычислить пределы функций:

№194. [6, №1398] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

№195. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$;

№196. [6, № 1404] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

№197. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$;

№198. [6, № 1399] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot\sin x - x(1+x)}{x^3}$;

№199. [6, № 1402] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$;

№200. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}\right)^{\frac{3}{x^2}}$;

№201. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[7]{x^7-x^6}\right)$;

№202. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^4(2x)}}{1-e^{\sin^2(4x)}}$;

№203. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;

№204. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}-x-2}{\ln(x-2)-\ln x}$;

№205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{\ln(1+x^4)}$;

№206. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^5}$;

№207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{\arcsin x-\operatorname{tg} x}$;

№208. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5}-e^x}{\ln(\cos x)}$.

№209. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1}{x^a}$ в зависимости от значений параметра a.

Решить разные задачи, используя разложения элементарных функций по формуле Тейлора:

№210. [6, № 1408] Для бесконечно малой при $x\to 0$ величины y определить главный член вида Cx^n $(C = const)$, если

$$y = (1+x)^x - 1.$$

№211. Для бесконечно малой при $x \to 0$ величины y определить главный член вида Cx^n, если

$$y = \ln(\cos(x^2)).$$

№212. Найти $f^{(43)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

№213. Найти $f^{(23)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^7) \cdot \cos(x^8)$.

№214. Найти $f^{(50)}(0)$, если $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

№215. Функцию $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ $(a \neq 0)$ разложить в степенной ряд:

а) по степеням x;

б) по степеням $x - b$, где $b \neq a$;

в) по степеням $\dfrac{1}{x}$.

№216. Используя разложения по формуле Маклорена, выяснить, при каких a, b, c выполнено равенство (при $x \to 0$)

$$e^{2x+x^2} - ax\sqrt[3]{1+bx} = 1 + cx^3 + o(x^3).$$

№217. Используя формулу Маклорена, выяснить, при каких a, b, c выполнено равенство

$$e^{2x-x^2} - \frac{1+ax}{\sqrt{1+bx^2}} = cx^3 + o(x^3).$$

№218. Найти такие значения коэффициетов a, b, c, d, чтобы при $x \to 0$ выполнялось равенство

$$e^x = \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2} + o(x^4).$$

№219. Найти такие значения коэффициетов a, b, c, чтобы при $x \to 0$ выполнялось равенство

$$\frac{3\sin 2x}{\cos 2x + 2} = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

№220. Подобрать числа a и b так, чтобы при $x \to 0$ функция

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

была бесконечно малой как можно более высокого порядка малости.

№221. Используя разложение по формуле Маклорена, найти приближенное значение числа $\sqrt{5}$ (например, раскладывая до членов 2-го порядка включительно) и оценить точность приближения.

№222. [6, № 1394(а)] Оценить абсолютную погрешность приближённой формулы

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

№223. [6, № 1394(б)] Оценить абсолютную погрешность приближённой формулы

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{при } |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

№224. [6, № 1397(г)] Вычислить число $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-4}.

№225. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-4}.

7.8 Ответы и решения

176. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{3}$ имеем:

$$\sin x = f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+$$

$$=\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\frac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5\right).$$

Так как

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'(x)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2},$$

$$f''(x)=-\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'''(x)=-\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2},$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f^{(5)}(x)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2},$$

то получаем разложение

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\frac{1}{240}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5\right).$$

177. По формуле Маклорена имеем:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6+o(x^6).$$

Вычислим первые шесть производных в точке 0:

$$f(0)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{2},$$

$$f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f'''(x) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2},$$

$$f^{(4)}(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f^{(5)}(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2},$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив в разложение, получим окончательно:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{\sqrt{3}}{48}x^4+\frac{1}{240}x^5-\frac{\sqrt{3}}{1440}x^6+o(x^6).$$

178. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ имеем:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 +$$

$$+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$$

Вычислим первые четыре производные в точке $x = 1$:

$$f(1) = e,\ f'(x) = 2xe^{x^2}\Big|_{x=1} = 2e,\ f''(x) = 2e^{x^2}(1+2x^2)\Big|_{x=1} = 6e,$$

$$f'''(x) = 4e^{x^2}(3x+2x^3)\Big|_{x=1} = 20e,$$

$$f^{(4)}(x) = 4e^{x^2}(4x^4+12x^2+3)\Big|_{x=1} = 76e.$$

Подставляя в формулу Тейлора, получаем искомое разложение:

$$e^{x^2} = e+\frac{2e}{1!}(x-1)+\frac{6e}{2!}(x-1)^2+\frac{20e}{3!}(x-1)^3+\frac{76e}{4!}(x-1)^4+o\left((x-1)^4\right) =$$

$$= e+2e(x-1)+3e(x-1)^2+\frac{10e}{3}(x-1)^3+\frac{19e}{6}(x-1)^4+o\left((x-1)^4\right).$$

179. Преобразовав $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ и используя стандартное разложение косинуса в окрестности нуля, получим

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - ... + (-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

180. Преобразовав функцию к виду $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{3x}{2})}$ и воспользовавшись биномиальным разложением

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - ... + (-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n\right) + o(x^n) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 - ... + (-1)^n\frac{3^n}{2^{n+1}}x^n + o(x^n).$$

181. Так как x близко к нулю, то и $2x - x^2$ также близко к нулю, а значит, можно воспользоваться стандартным разложением экспоненциальной функции $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + ... + \dfrac{t^5}{5!} + o(t^5)$, подставив вместо t выражение $2x - x^2$. Раскрывая скобки и записывая все члены порядка выше 5 как $o(x^5)$, получим:

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} +$$

$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o((2x-x^2)^5) = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(4x^2 - 4x^3 + x^4) +$$

$$+\frac{1}{6}((2x)^3 - 3(2x)^2x^2 + 3(2x)(x^2)^2) + \frac{1}{24}((2x)^4 - 4(2x)^3x^2)$$

$$+\frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

Здесь при упрощении использовалось, что $o((2x-x^2)^5) = o(x^5)$. Докажем это. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o((2x-x^2)^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{o((2x-x^2)^5)}{(2x-x^2)^5}\cdot\frac{(2x-x^2)^5}{x^5}\right) = 0.$$

182. Подставляя в разложение $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$ двучлен $x + x^2$, имеем

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} + o((x+x^2)^3).$$

Раскрывая скобки, оставляя только члены не выше 3-й степени относительно x и учитывая, что при $x \to 0$ имеем $o((x+x^2)^3) = o(x^3)$, окончательно получим

$$\ln(1+x+x^2) = x+x^2-\frac{x^2+2x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}+o(x^3).$$

183. Разложение по целым неотрицательным степеням переменной x предполагает разложение в окрестности точки $x_0 = 0$. Так как при $x \to 0$ имеем $\sin x \to 0$, то, подставляя в разложение $\sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^4)$ вместо t выражение $\sin x$, получаем

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^4 x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) -$$

$$-\frac{1}{6}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^3+o(x^4) = x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^4) = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Здесь при упрощении было использовалось, что $o(\sin^4 x) = o(x^4)$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(\sin^4 x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{o(\sin^4 x)}{\sin^4 x}\cdot\frac{\sin^4 x}{x^4}\right) = 0.$$

184. Воспользовавшись стандартными разложениями, при $x \neq 0$ получаем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7),$$

поэтому

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^3),$$

где $\alpha = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} - \dfrac{x^6}{7!} + o(x^7)$.

185. Поскольку $x > 1$, то биномиальное разложение $(1+x)^m = 1+mx+o(x)$ применять нельзя. Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$$

Поскольку $\dfrac{1}{x^2} < 1$, то теперь можно воспользоваться биномиальным разложением $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + o(t^2)$ при $t = \dfrac{1}{x^2}$, откуда получаем

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

186. Решать задачу стандартным способом, находя производные функции до 4-го порядка включительно и подставляя их значения в точке $x = 0$ в формулу Тейлора нецелесообразно ввиду больших вычислений. Поступим иначе: преобразуем функцию к виду

$$f(x) = \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{(1-x+x^2)(x+1)} = \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{x^3+1} =$$

$$= \frac{x^3+1+2x(x+1)}{x^3+1} = 1 + \frac{2x(x+1)}{x^3+1} = 1 + 2x(x+1)(x^3+1)^{-1}.$$

Разложим $(x^3+1)^{-1}$ в окрестности нуля до членов 4-го порядка: $(x^3+1)^{-1} = 1 - x^3 + o(x^5)$. Подставляя это в выражение для функции, раскрывая скобки и упорядочивая слагаемые по мере возрастания степени x, получим искомое разложение

$$f(x) = 1 + 2x(x+1)(1 - x^3 + o(x^5)) = 1 + 2x(x+1)(1-x^3) +$$

$$+2x(x+1)o(x^5) = 1+2x+2x^2-2x^4+(-2x^5+2x(x+1)o(x^5)) =$$
$$= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4).$$

Далее, чтобы найти $f^4(0)$, нет необходимости вычислять производную 4-го порядка. Воспользуемся полученным разложением. Согласно формуле Маклорена,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4),$$

поэтому, в силу единственности разложения, $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2$, откуда $f^{(4)}(0) = -48$.

187. Так как при $x \to 0$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$, то $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$. Кроме того, при $t \to 0$ $\sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$. Подставляя $t = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$, получаем искомое разложение:

$$\sin(1-\cos x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) -$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)^3 + o(x^6) =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{7x^6}{360} + o(x^6).$$

188. Преобразуем функцию к виду: $f(x) = \dfrac{e^{3x^2}}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$.

Поскольку $e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \dfrac{(3x^2)^2}{2!} + o(x^4)$, при $t \to 0$ имеем $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$, а следовательно, $\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$, то, подставляя, получаем искомое разложение:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{4}x^4\right) + o(x^4) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x^2 + \frac{13}{8}x^4 + o(x^4).$$

189. Так как при $t \to 0$ имеем $\operatorname{sh} t = t + \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$, а $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, то, подставляя, получаем:

$$\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

190. Так как при $x \to 0$ $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + o(x^6)$, и при $t \to 0$ $\ln(1+t) = t + o(t)$, то, подставляя, приходим к разложению:

$$\ln(\cos(x^2)) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)\right) =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6)\right) + o(x^6) = -\frac{x^4}{2} + o(x^6).$$

191. Так как при $x \to 0$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$, то $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^5)$. Кроме того, при $t \to 0$ имеем $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \dfrac{t}{3} - \dfrac{t^2}{9} + o(t^2)$. Подставляя, получим

$$\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt[3]{1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{360} - \frac{x^4}{324} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{18} - \frac{x^4}{3240} + o(x^4).$$

192. Поскольку $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}}) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$, то разложим вначале показатель степени у экспоненты:

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Тогда

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) =$$

$$= e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right)$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).$$

193. Имеем при $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1}{1+\alpha} =$$

(где $\alpha = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)$)

$$= 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) -$$

$$- \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{16} + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

194. Воспользуемся стандартными разложениями:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

195. Имеем при $x \to 0$: $\sin(\sin x) = \sin(x+o(x)) = x + o(x)$, $1-\cos x = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\cos(\frac{\pi}{2}\cos x) = \sin(\frac{\pi}{2}(1-\cos x)) = \sin(\frac{\pi}{4}x^2+o(x^2)) = \frac{\pi}{4}x^2+o(x^2)$, откуда видно, что искомый предел равен 0.

196. Так как при $x\to+\infty$ имеем $\frac{1}{x}\to 0$, то воспользуемся разложением по формуле Маклорена $\ln(1+t) = t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$ при $t=\dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)\right)=\dfrac{1}{2}$.

197. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{e^{-x^2}}}{x^4(\sqrt{\cos x}+\sqrt[4]{e^{-x^2}})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{e^{-x^2}}}{x^4}.$$

Поскольку $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$, $\sqrt{1+t}=1+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+o(t^2)$, то при $t=-x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$ имеем

$$\sqrt{e^{-x^2}} = \sqrt{1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = 1+\frac{1}{2}\left(-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-$$

$$-\frac{1}{8}\left(-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)^2+o(x^4) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{24}.$$

198. Имеем
$$\lim_{x\to 0}\frac{\Big(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\Big)\cdot\Big(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\Big)-x-x^2)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

199. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^6}}\right)=$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^{11}}\right)\right)\right)=$$
$$=\quad\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}+x^2-x+\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-x^3+o(1)\right)$$
$=1/6$.

200. Преобразуем предел к виду
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{\frac{3}{x^2}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-1\right)\frac{3}{x^2}}\overset{[0\cdot\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-1\right)\frac{3}{x^2}}=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2-1\right)\frac{3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)-1\right)\frac{3}{x^2}}=e^{-1}.$$

201. Преобразуем предел к виду
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt[7]{1-\frac{1}{x}}\right).$$
Так как при $t\to 0$ $\sqrt[6]{1+t}=1+\dfrac{t}{6}+o(t)$, $\sqrt[7]{1+t}=1+\dfrac{t}{7}+o(t)$, то $\sqrt[6]{1+\dfrac{1}{x}}\ =\ 1+\dfrac{1}{6x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{x}}\ =\ 1-\dfrac{1}{7x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Подставляя в выражение под знаком предела, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{7x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+o(1)\right)=\frac{13}{42}.$$

202. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\sin^4(2x)}}{1-e^{\sin^2(4x)}}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(1+\sin^4(2x)+o(x^4))}{1-(1+\sin^2(4x)+o(x^2))}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^4(2x)+o(x^4)}{-\sin^2(4x)+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin^4(2x)}{(4x)^2}+o(x^2)}{-\frac{\sin^2(4x)}{(4x)^2}+o(1)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{\sin^4(2x)}{(4x)^2}+o(x^2)\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{\sin^2(4x)}{(4x)^2}+o(1)\right)}=\frac{0}{-1}=0.$$

203. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right),$$

тогда, поскольку при $t\to0$ имеет место разложение $\sqrt{1+t}=1+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2+o(t^2)$, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-2\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$=-\dfrac{1}{4}.$

204. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1-\frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}.$$

Так как при $t \to 0$ имеют место разложения $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$, то при $x \to +\infty$

$$\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Подставляя под знак предела, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 - \frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-\frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{4}.$$

205. 1) $\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

2) Так как при $t \to 0$ $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$, то

$$\sqrt{1 + (-x^2 + x^4)} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4) - \frac{1}{8}(-x^2 + x^4)^2 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4).$$

3) $\ln(1 + x^4) = x^4 + o(x^4)$. Подставляя полученные разложения под знак предела, находим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}.$$

206. Воспользуемся разложениями косинуса, арксинуса и арктангенса, удерживая при разложении члены не выше 5-й степени:

$$\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\right) -$$
$$-\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{24} -$$
$$-x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5) = -\frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{x^5}{6} + o(x^5)}{x^5} = -\dfrac{1}{6}.$

207. Воспользуемся готовыми разложениями синуса, арктангенса, арксинуса и тангенса, удерживая при разложении члены не выше 3-й степени (члены 1-й степени у всех этих разложений одинаковы):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - \operatorname{tg} x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1.$$

208. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\left(e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2)-x} - 1\right)}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2)-x} - 1}{\ln(\cos x)}.$$

Так как $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^3)$, то

$$\left(\frac{1}{x} + 5\right)\ln(1+x^2) - x = \left(\frac{1}{x} + 5\right)\left(x^2 + o(x^3)\right) - x = 5x^2 + o(x^2).$$

Далее, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, поэтому $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Окончательно имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x^2+o(x^2)} - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + 5x^2 + o(x^2)) - 1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{5 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = -10.$$

209. Вначале сделаем замену $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1}{x^a} = \lim_{t\to +0} \frac{e^t - t - 1}{(\frac{1}{t})^a} =$$

$$= \lim_{t\to +0} \frac{\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t - 1}{t^{-a}} =$$

$$= \lim_{t\to +0} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^{-a}} = \lim_{t\to +0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{t^{-a-2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } a = -2; \\ 0, & \text{если } a > -2; \\ +\infty, & \text{если } a < -2. \end{cases}$$

210. Поскольку главный член Cx^n эквивалентен y при $x \to 0$, то рассмотрим предел отношения y и x^n в точке $x = 0$ и выясним, при каких n он равен константе $C \neq 0$. Воспользуемся при этом двумя разложениями $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1 + x) = x + o(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^x - 1}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(1+x)} - 1}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x(x+o(x))} - 1}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+o(x^2)} - 1}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1}{x^n} \overset{n=2}{=} 1.$$

Таким образом, главный член $Cx^n = x^2$.

211. Так как при $x \to 0$ имеем $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + o(x^4)$, и при $t \to 0$ имеем $\ln(1 + t) = t + o(t)$, то, подставляя, получаем:

$$\ln(\cos(x^2)) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^6)\right)\right) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Таким образом, главный член $Cx^n = -\frac{1}{2}x^4$.

212. Найдём разложение функции $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$ по формуле Маклорена:

$$\sin(x^{13} + x^{15}) = (x^{13} + x^{15}) - \frac{1}{3!}(x^{13} + x^{15})^3 + o(x^{45}) =$$

$$= x^{13} + x^{15} - \frac{1}{6}(x^{39} + 3x^{26}x^{15} + 3x^{13}x^{30} + x^{45}) + o(x^{45}) =$$

$$= x^{13} + x^{15} - \frac{1}{6}x^{39} - \frac{1}{2}x^{41} - \frac{1}{2}x^{43} - \frac{1}{6}x^{45} + o(x^{45}).$$

Заметим, что в полученном разложении коэффициент при x^{43} равен $-\frac{1}{2}$. С другой стороны, коэффициент при x^{43} равен $\frac{f^{(43)}(0)}{43!}$. В силу единственности разложения в степенной ряд их можно приравнять: $\frac{f^{(43)}(0)}{43!} = -\frac{1}{2}$, откуда $f^{(43)}(0) = -\frac{43!}{2}$. Вычислять производную 43-го порядка последовательным дифференцированием, очевидно, было бы неэффективно.

213. Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(x^7 + x^8) + \sin(x^7 - x^8)).$$

Раскладывая функции по формуле Маклорена, получаем

$$\sin(x^7 + x^8) = (x^7 + x^8) - \frac{1}{3!}(x^7 + x^8)^3 + o(x^{24}) =$$

$$= x^7 + x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} + 3x^{22} + 3x^{23} + x^{24}) + o(x^{24}),$$

$$\sin(x^7 - x^8) = (x^7 - x^8) - \frac{1}{3!}(x^7 - x^8)^3 + o(x^{24}) =$$

$$= x^7 - x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} - 3x^{22} + 3x^{23} - x^{24}) + o(x^{24}),$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(x^7 + x^8) + \sin(x^7 - x^8)\right) =$$

$$= x^7 - \frac{1}{6}x^{21} - \frac{1}{2}x^{23} + o(x^{24}).$$

Так как коэффициент $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ при x^{23} равен $\dfrac{f^{(23)}(0)}{23!}$, то отсюда находим $f^{(23)}(0)=-\dfrac{23!}{2}$.

214. Домножив числитель и знаменатель на $1-x$, представим функцию в виде:

$$f(x)=\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3},$$

и, используя готовые разложения, получим:

$$f(x)=(1+x^3+x^6+...)-x(1+x^3+x^6+...)=$$

$$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+...+(x^{3n}-x^{3n+1})+...$$

Поскольку $f^{(50)}(0)=50!a_{50}$, то необходимо найти коэффициент при x^{50}. Число 50 при делении на 3 дает остаток 2, т. е. оно представимо в виде $3n+2$, но такие степени в данном разложении отсутствуют (это 2, 5, 8,...). Значит, $a_{50}=0$ и $f^{(50)}(0)=0$.

215. Решение.

а) $f(x)=\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)=\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{x}{a}+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^3}{a^3}+...\right)=$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}};$$

б) $f(x)=\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{1}{(a-b)-(x-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}\right)=$

$$=\frac{1}{a-b}\left(1+\frac{x-b}{a-b}+\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}+...\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}};$$

в) $f(x)=\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x}-1}=-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{a}{x}}=-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{a}{x}\right)^n=$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}.$$

216. $a=2$, $b=\dfrac{9}{2}$, $c=\dfrac{47}{6}$. Решение. Имеем

$$e^{2x+x^2}=1+(2x+x^2)+\frac{1}{2}(2x+x^2)^2+\frac{1}{6}(2x+x^2)^3+o(x^3)=$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$(1+bx)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}bx+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(bx)^2+o(x^2) = 1+\frac{1}{3}bx-\frac{1}{9}(bx)^2+o(x^2).$$

Тогда левая часть равенства принимает вид:

$$1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 - ax\left(1 + \frac{1}{3}bx - \frac{1}{9}(bx)^2\right) + o(x^3) =$$

$$= 1 + x(2-a) + x^2\left(3 - \frac{ab}{3}\right) + x^3\left(\frac{10}{3} + \frac{ab^2}{9}\right) + o(x^3).$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2 - a = 0; \\ 3 - \frac{ab}{3} = 0; \\ \frac{10}{3} + \frac{ab^2}{9} = c, \end{cases} \qquad \text{т. е. при} \qquad \begin{cases} a = 2; \\ b = \frac{9}{2}; \\ c = \frac{47}{6}. \end{cases}$$

217. $a = 2$, $b = -2$, $c = -\dfrac{8}{3}$. Решение.

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(2x-x^2)^2 + \frac{1}{6}(2x-x^2)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3);$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+bx^2}} = (1+bx^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{bx^2}{2} + o(x^2)$, тогда

$$(1+ax)(1+bx^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+ax)\left(1 - \frac{bx^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= 1 + ax - \frac{bx^2}{2} - \frac{abx^3}{2} + o(x^3).$$

Подставляя в левую часть равенства, получим:

$$e^{2x-x^2} - \frac{1+ax}{\sqrt{1+bx^2}} = \left(1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) -$$

$$- \left(1 + ax - \frac{bx^2}{2} - \frac{abx^3}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= (2-a)x + \left(1+\frac{b}{2}\right)x^2 + \left(\frac{ab}{2}-\frac{2}{3}\right)x^3 + o(x^3).$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2-a=0; \\ 1+\frac{b}{2}=0; \\ \frac{ab}{2}-\frac{2}{3}=c, \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a=2; \\ b=-2; \\ c=-\frac{8}{3}. \end{cases}$$

218. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{12}$, $c=-\dfrac{1}{2}$, $d=\dfrac{1}{12}$. Решение. Перепишем равенство в виде $e^x(1+cx+dx^2)=1+ax+bx^2+o(x^4)$, или, подставляя разложение экспоненты,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)(1+cx+dx^2) = 1+ax+bx^2+o(x^4).$$

Перепишем равенство в виде:

$$(1+c-a)x + \left(d+c+\frac{1}{2}-b\right)x^2 + \left(d+\frac{c}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3 +$$

$$+\left(\frac{d}{2}+\frac{c}{6}+\frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4) = o(x^4),$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 1+c-a=0; \\ d+c+\frac{1}{2}-b=0; \\ d+\frac{c}{2}+\frac{1}{6}=0; \\ \frac{d}{2}+\frac{c}{6}+\frac{1}{24}=0, \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2}; \\ b=\frac{1}{12}; \\ c=-\frac{1}{2}; \\ d=\frac{1}{12}. \end{cases}$$

219. Перепишем равенство в виде

$$3\sin 2x = (2+\cos 2x)(ax+bx^3+cx^5+o(x^5)), \quad x\to 0.$$

Подставляя разложения для синуса и косинуса, имеем:

$$3\left(2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}+o(x^5)\right) =$$

$$= \left(2+1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+o(x^5)\right)(ax+bx^3+cx^5+o(x^5)).$$

Раскрывая скобки, упрощая и удерживая члены не выше 5-го порядка, получим:

$$6x-4x^3+\frac{4x^5}{5}+o(x^5) = 3ax+(3b-2a)x^3+\left(\frac{2a}{3}-2b+3c\right)x^5+o(x^5),$$

откуда находим

$$\begin{cases} 6 = 3a; \\ -4 = 3b-2a; \\ \frac{4}{5} = \frac{2a}{3}-2b+3c; \end{cases} \quad \text{т. е. при} \quad \begin{cases} a = 2; \\ b = 0; \\ c = -\frac{8}{45}. \end{cases}$$

Итак, $\dfrac{3\sin 2x}{\cos 2x+2} = 2x - \dfrac{8}{45}x^5 + o(x^5)$, $x \to 0$.

220. Разложим функцию по формуле Маклорена:

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4+o(x^4))$$

$$= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-(1+ax^2-bx^2-abx^4+b^2x^4)+o(x^4) =$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}-a+b\right)+x^4\left(\frac{1}{24}+ab-b^2\right)+o(x^4).$$

Функция будет бесконечно малой как можно более высокого порядка малости, когда

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}-a+b = 0; \\ \frac{1}{24}+ab-b^2 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{5}{12}; \\ b = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

221. Представим число в виде

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценку числа членов в биномиальном разложении $(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ по формуле Маклорена для достижения заданной точности можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\left(\frac{\theta}{4}\right)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right| =$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n)(1+\frac{\theta}{4})^{\frac{1}{2}-n-1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right|.$$

В данном случае оценим точность приближения при $n=2$:

$$\left|R_2\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{f^{(3)}\left(\frac{\theta}{4}\right)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\frac{\theta}{4})^{-\frac{5}{2}}}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right|$$

$$< \frac{1}{1024}.$$

Таким образом, если написать разложение до члена 2-го порядка включительно, получим, что точное значение $\sqrt{5}$ отличается от полученного приближения

$$\sqrt{5} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$

на величину, меньшую $\dfrac{1}{512}$.

222. Рассмотрим формулу Тейлора на промежутке $[0,1]$ и оценим остаточный член в форме Лагранжа, где $\xi \in (0,1)$:

$$\left|e^x - 1 - x - \ldots - \frac{x^n}{n!}\right| = |R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} =$$

$$= \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

223. Поскольку $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots = x - \dfrac{x^3}{6} + R_4(x)$, то при $|\xi| < |x|$ (можно было воспользоваться нечётностью функции и считать $0 < \xi < x$)

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| = |R_4(x)| = \left|\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot x^5\right| = \frac{|\cos(\xi)|}{5!}\cdot|x|^5 \leqslant$$

$\leqslant \dfrac{1}{120}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{3840}$. Таким образом, абсолютная погрешность не превосходит $\dfrac{1}{3840}$.

224. Имеем $\sqrt{5}=\sqrt{1+4}=\sqrt{4(1+\frac{1}{4})}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$. Оценим число членов в разложении по формуле Маклорена для достижения заданной точности. Оценку количества членов n можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа:

$$2\cdot\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n<10^{-4}.$$

Найдя отсюда n, затем можно получить искомое приближение

$$\sqrt{5}\approx 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}\cdot\frac{1}{4^3}+\ldots\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}\right)\approx 2,2361.$$

225. Представим $\sqrt{2}$ в виде

$$\sqrt{\frac{50}{25}}=\sqrt{\frac{50}{49}\cdot\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}.$$

Тогда, используя разложение $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$, получим

$$\sqrt{2}\approx\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{98}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49^2}\right)=1,4(1+0,0102-0,0005)=1,4142.$$

При этом легко проверить, что точность приближения

$$\frac{7}{5}\left|R_2\left(\frac{1}{49}\right)\right|=\frac{7}{5}\left|\frac{f^{(3)}\left(\frac{\theta}{49}\right)}{3!}\left(\frac{1}{49}\right)^3\right|=$$

$$=\frac{7}{5}\left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\frac{\theta}{49})^{-\frac{5}{2}}}{3!}\left(\frac{1}{49}\right)^3\right|<7,5\cdot 10^{-7}<\frac{1}{10^4}$$

оказывается достаточной. Можно было провести вычисления и так:

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(\frac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}(1-0,02)^{-\frac{1}{2}}=1,4(1+0,01+0,00015)=$$

$=1,41421$, воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}.$$

8 СЕМИНАР: Неопределённый интеграл и методы его вычисления

«Дистанционная форма обучения является разновидностью очной формы образовательного процесса».
«Интерфаксу» – пресс–служба МГУ,
18 ноября 2020 г.

8.1 Первообразная и неопределённый интеграл

Рассмотрим задачу восстановления функции по её известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления, называемая *интегрированием*. Процедура интегрирования является обратной процедуре дифференцирования.

Понятие перво́бразной.[1] Пусть на интервале (a, b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется *точной перво́бразной* по отношению к функции $f(x)$ *на интервале*[2] (a, b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x) = f(x)dx$).

Пример 66. Функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$. $\square$

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a, b) хотя бы одну первообразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая

[1] От слова «о́браз». Здесь «плавающее» ударение, иногда допускается ударение «первообра́зная».

[2] Под *точной первообразной* для $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ будем понимать функцию $F(x)$, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a + 0)$, равную $f(a + 0)$, и левую производную $F'(b - 0)$, равную $f(b - 0)$.

функция вида $F(x)+C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a,b), то любая другая первообразная $\overline{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F}(x)=F(x)+C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнём, что в силу дифференцируемости первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведённом выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция $f(x)$, определённая на (a,b), имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщённой первообразной.

Функция $F(x)$ называется *обобщённой первообразной* для функции $f(x)$ *на интервале* (a,b), если: 1) $F(x)$ непрерывна на (a,b); 2) в любой точке $x\in(a,b)$, за исключением, быть может, множества точек K, функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала (a,b) множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал (a,b) бесконечен, т. е. имеет вид $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$ или $(-\infty,+\infty)$, то множество K может быть счётным, но при этом каждый конечный подинтервал из (a,b) не должен содержать более конечного числа точек K.

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщённой первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то будем называть $F(x)$ просто первообразной.

Пример 67. Найти общий вид первообразной для функции $f(x)=e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

Решение. При $x>0$ $f(x)=e^x$ и первообразная имеет вид

$F(x) = e^x + C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R}$. При $x < 0$ $f(x) = e^{-x}$ и, соответственно, её первообразная имеет вид $F(x) = -e^{-x} + C_2$, где $C_2 \in \mathbb{R}$. Учтём теперь непрерывность первообразной в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(-e^{-x} + C_2) = \lim\limits_{x\to 0+0}(e^x + C_1)$, откуда находим $C_2 = C_1 + 2$. Таким образом, общий вид любой из первообразных следующий:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, & \text{если } x \geq 0; \\ -e^{-x} + C_1 + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что, так как

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(e^x + C_1) - (1 + C_1)}{x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{(-e^{-x} + C_1 + 2) - (1 + C_1)}{x} = 1,$$

то $F(x)$ дифференцируема всюду, включая точку $x = 0$, т. е. мы нашли точную первообразную.

Понятие неопределённого интеграла. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a, b), C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Область интегрирования (a, b) обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности $f(x)$). Например, $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.

Пример 68. [6, № 1648] Найти неопределённый интеграл

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Решение. Имеем

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx = \int |\cos x-\sin x| dx =$$

$$= \begin{cases} \ \ \sin x+\cos x+C, & \text{если} \ \ 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ -\sin x-\cos x+C_1, & \text{если} \ \ \frac{\pi}{4}<x\le\pi. \end{cases}$$

В точке $\dfrac{\pi}{4}$ запишем условие непрерывности первообразных:

$$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+C=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+C_1,$$

откуда $C_1=C+2\sqrt{2}$. Таким образом, имеем

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \begin{cases} \ \ \sin x+\cos x+C, & \text{если} \ \ 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ -\sin x-\cos x+C+2\sqrt{2}, & \text{если} \ \ \frac{\pi}{4}<x\le\pi. \end{cases}$$

Замечание. Иногда в данной задаче приводят ответ в виде

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = (\sin x+\cos x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

Надо понимать, что это не вполне корректно. Действительно, так выглядит неопределённый интеграл на каждом из промежутков $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$. Однако на всём отрезке $[0,\pi]$ интеграл равен именно выражению, полученному нами выше. □

Вообще, если в условии задачи сказано, что надо вычислить неопределённый интеграл, но не указано, на каком именно промежутке, то это подразумевает, что его требуется вычислить на области интегрируемости подынтегральной функции. И, строго говоря, в ответе следует указывать эту область интегрируемости, например

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \quad (x\ne 0).$$

Такая запись означает, что данная формула справедлива для любого интервала, не содержащего внутри себя значение $x=0$ (в том числе для каждого из бесконечных интервалов $(-\infty,0)$

и $(0,+\infty)$). Эта форма ответа в данном случае единственно возможная, так как найти интеграл на объединении этих промежутков нельзя, поскольку первообразные терпят разрыв 2-го рода в точке $x = 0$.

Иногда при вычислении интеграла применяется искусственный приём деления на некоторое выражение, которое, естественно, тогда не должно обращаться в нуль. Допустим, это выражение равно нулю при $x = x_0$. Тогда вычисляют интеграл при $x \neq x_0$, а в конце, если при этом значении x_0 ни подынтегральная функция, ни первообразные не имеют особенностей (определены и непрерывны), доопределяют полученное выражение для первообразных в точке x_0 их предельными значениями.

Пример 69. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция определена, непрерывна и, следовательно, интегрируема при всех действительных x. При $x \neq 0$ имеем:

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(x+\frac{1}{x}+1)^2}dx = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x}+1)^2} =$$

$$= \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{x}{x^2+x+1} + C.$$

В точке $x = 0$ подынтегральная функция и её первообразные $-\frac{x}{x^2+x+1} + C$ непрерывны, поэтому полученный для интеграла результат можно считать верным и при $x = 0$, если доопределить каждую первообразную её значением в нуле.

Ответ: $-\frac{x}{x^2+x+1} + C$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Обратим внимание читателя ещё на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ или $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$

(на другом луче $x < -a$ первообразная находится совершенно аналогичными рассуждениями). Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой же ситуации при записи ответа (и непосредственно интегрировании) можно использовать функцию сигнум.

Пример 70. [6, №1683] Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Воспользуемся подстановкой $t = \dfrac{1}{x}$, тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} = -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C. \ \square$$

Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях. Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т. е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ всегда имеет на интервале (a,b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a<x<b)$. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Функции, которые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены. К ним относятся, например,

$$\text{интеграл Пуассона}: \quad \int e^{-x^2}dx,$$

$$\text{интегралы Френеля}: \quad \int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx,$$

$$\text{интегральный логарифм}: \quad li(x)=\int\frac{dx}{\ln x},$$

интегральные синус и косинус :

$$si(x)=\int\frac{\sin x}{x}dx, \quad ci(x)=\int\frac{\cos x}{x}dx,$$

$$\text{интегральная показательная функция}: \quad ei(x)=\int\frac{e^x}{x}dx,$$

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы $\int\frac{e^x}{x^n}dx$, $\int\frac{\sin x}{x^n}dx$, $\int\frac{\cos x}{x^n}dx$ $(x\in\mathbb{N})$ и многие другие. Так, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + \delta})dx$, как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют *специальными функциями*.

Даже если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближённо с некоторой степенью точности. Так, в курсе вычислительных методов изучаются специальные способы приближённого вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и пр. подходы).

Из современных программных средств назовём достаточно мощный пакет для онлайн интегрирования «Wolfram Mathematica (online integrator)», который можно найти по ссылке $http://integrals.wolfram.com/$

8.2 Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица простейших интегралов

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ (эти свойства отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, где $C \neq 0$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (подразумевается, что обе функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве). Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределённого интеграла, причём эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы.

Следующее свойство 5 показывает, что приведённая ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

6. Одна из первообразных чётной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной функции есть функция чётная.

Рассмотрим далее табличные интегралы и наиболее общие методы вычисления неопределённых интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что *приписывать константу C* в неопределённом интеграле *нужно обязательно*, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Кроме того, надо приучить себя при вычислении неопределённых интегралов всегда *указывать область интегрирования* (аналог ОДЗ в уравнениях и неравенствах, области определения функций). Заметим также, что ниже мы будем говорить об интегралах только для непрерывных функций. Если же функция имеет точки разрыва, то рассматривать её будем лишь в промежутках её непрерывности, где интеграл от неё существует.

Таблица простейших интегралов.

Отметим, что название «табличный интеграл» является довольно условным. Существует некоторый минимальный набор неопределённых интегралов, к которым наиболее часто сводится вычисление интегралов. В частности, к ним относят интегралы от некоторых известных элементарных функций. По мере того, как вы приобретаете всё больше навыков в вычислении неопределённых интегралов, понятие «табличного интеграла» расширяется, и в условную таблицу попадают многие из вычисленных прежде интегралов. Правильность выполненного интегрирования в случае сомнений всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат. Приведём лишь некоторые, наиболее часто употребляемые виды интегралов.

Интегралы от степенны́х функций:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$.

Интегралы от показательных (в частности, экспоненциальной, когда $a = e$) функций:

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, x \in \mathbb{R}), \qquad \int e^x dx = e^x + C$.

Интегралы от тригонометрических функций:

4. $\int \cos x dx = \sin x + C \quad (x \in \mathbb{R})$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (x \in \mathbb{R})$;

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$;

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы от рациональных функций:

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$ ($x \in \mathbb{R}$; этот интеграл подразумевает двоякую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление);

9. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$ ($x \in \mathbb{R}$); здесь и ниже параметр a считаем положительным;

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (x \neq \pm a)$;

Интегралы от иррациональных функций:

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (|x| < 1)$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (|x| < a)$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0)$;

14. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| \le a)$;

15. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$.

Интегралы от гиперболических функций:

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x \in \mathbb{R})$;

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad (x \in \mathbb{R})$;

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C \quad (x \in \mathbb{R})$;

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x + C \quad (x \ne 0)$.

Существуют специальные (пополняемые) таблицы неопределённых интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости.

8.3 Основные методы интегрирования

Практически любой неопределённый интеграл вычисляется путём его упрощения и сведения в конечном итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к основным методам интегрирования следующие три способа интеграции:

– использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов;

– замена переменной интегрирования;

– интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения. Остановимся на каждом из перечисленных методов подробнее.

Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований. Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов, например:

Пример 71. Вычислить интеграл

$$\int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C \ \ (x \neq -1).$$

Аналогичным приёмом вычисляется интеграл $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$;

– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение:

Пример 72. [6, № 1729] Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}d(x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right) + C \ (x \geq 1). \ \square$$

– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей):

Пример 73. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^2-3x-1}{x+1}dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{2x^2-3x-1}{x+1}dx = \int \frac{2x(x+1)-5x-1}{x+1}dx =$$

$$= \int \frac{2x(x+1)-5(x+1)+4}{x+1}dx =$$

$$= \int \left(2x-5+\frac{4}{x+1}\right)dx = x^2-5x+4\ln|x+1|+C \ (x \neq -1);$$

– использование алгебраических, тригонометрических, гиперболических и логарифмических формул и т. п.:

Пример 74. Вычислить $\int (2^{\ln x} - x^{\ln 2})dx$.

Решение. Воспользуемся известным свойством логарифмов $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$:

$$\int (2^{\ln x} - x^{\ln 2})dx = C \quad (x > 0)$$

(подынтегральная функция равна тождественно нулю). $\square$

Интегрирование путем замены переменной. Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций – метод замены переменной, или метод подстановки. Рассмотрим два возможных случая.

1. *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t = t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))t'(x)dx = \int g(t)dt. \qquad (1)$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2}),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и т. п.}$$

Подобную замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)\ dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t)+C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путём обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Пример 75. Вычислить $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение. Внесём $\cos x$ под знак дифференциала: $\cos x dx = d(\sin x)$, а затем сделаем замену $t = \sin x$:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C.$$

Заметим также, что при определённом навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t. Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x) = \frac{(\sin x)^4}{4} + C.$$

В следующем примере при сведении интеграла к табличному также не будем вводить новую переменную, а сразу запишем результат:

Пример 76. Вычислить $\int e^{5x} dx$.

Решение. $\int e^{5x} dx = \dfrac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \dfrac{1}{5} e^{5x} + C.$ □

2. *Использование подстановок.* Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt. \tag{2}$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Рассмотрим пример задачи, где при вычислении интеграла возможны сразу несколько различных подстановок. Следовательно, возникает проблема выбора наиболее оптимальной из них. А для того чтобы выбрать более удобную подстановку, надо знать их разновидности и области применения. Итак, сравнивайте и выбирайте.

Пример 77. [6, № 1683] Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. *1-й способ* (подстановка $t = 1/x$). ОДЗ: $|x| > 1$. Воспользуемся подстановкой $t = \dfrac{1}{x}$, тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1} = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, получаем:

$$\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} = -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

2-й способ (подстановка $t = \sqrt{x^2-1}$). Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2-1}$, тогда $x^2 = t^2+1$, $xdx = tdt$ и

$$\int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.$$

3-й способ $\left(\text{тригонометрическая подстановка } x = \dfrac{1}{\sin t}\right)$.

Выполним тригонометрическую подстановку $x = \dfrac{1}{\sin t}$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \operatorname{sgn}(\sin t)\cdot\operatorname{ctg} t,$$

$dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ и для интеграла имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(\sin t)\int \frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\cdot\operatorname{ctg} t} = -\operatorname{sgn}(\sin t)\int dt =$$

$$-\operatorname{sgn}(\sin t)\cdot t + C = -\operatorname{sgn}(x)\cdot\arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

Заметим, что можно было бы вычислить данный интеграл с помощью аналогичной подстановки через косинус:

$$x = \frac{1}{\cos t},\text{ где } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

4-й способ (гиперболическая подстановка $|x| = \operatorname{ch} t$), $t \geq 0$. Тогда $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d|x|}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch} t \cdot |\operatorname{sh} t|} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t}$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{1+\operatorname{sh}^2 t}$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t) \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) + C = \operatorname{arctg} |\operatorname{sh} t| + C = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} + C =$$

$$= \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + C.$$

5-й способ (1-я подстановка Эйлера).

Положим $t = \sqrt{x^2-1} + x$, тогда $x^2 - 1 = (t-x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2-1}{2t^2} dt$ и для интеграла получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2} dt}{\frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2-1}{2t}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1} + x) + C. \square$$

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже.

Интегрирование по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, в краткой форме,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путём интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^n e^{ax}dx,\ \int x^n \sin(ax)dx,\ \int x^n \ln^m xdx,$$

$(n, a \in \mathbb{R}, n \neq -1, m \in \mathbb{N})$;

$$\int \sin(\ln x)dx,\ \int e^{ax}\cos(bx)dx\ \ (a, b \in \mathbb{R}),\ \int P(x)e^{ax}dx,$$

$$\int P(x)\sin(ax)dx,\ \int P(x)\ln xdx,$$

$$\int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\,\mathrm{arctg}\, xdx,$$

где $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – целый алгебраический многочлен относительно x, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. При этом в интегралах $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$ за u следует принять $P(x)$, а за dv, соответственно, выражения $e^{ax}dx, \sin(ax)dx$; а в интегралах вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$ за u принимаются, соответственно, функции $\ln x$, $\arcsin x$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Пример 78. Вычислить $\int x^3 \cdot \ln x dx$.

Решение. Так как дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{1}{4}x^4$ и, интегрируя по частям, находим

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C \ (x > 0).$$

Пример 79. Вычислить $\int \sqrt{x^2+a}\, dx \quad (a \neq 0)$.

Решение. Положим $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$I = \int \sqrt{x^2+a}\, dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - I + a\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|.$$

Отсюда, выражая I, окончательно находим:

$$\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C. \ \square$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию (логарифмическую, показательную, обратную тригонометрическую, гиперболическую и пр.) сложного аргумента $\varphi(x)$, то часто для упрощения подынтегрального выражения бывает полезно сделать замену, приняв этот аргумент за новую переменную интегрирования.

Пример 80. $\int \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$

Решение. Положим $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 < t \leq 1)$, тогда $x = \frac{1}{t^2}$ и $dx = -\frac{2dt}{t^3}$. Получаем интеграл $-2\int \frac{\arcsin t}{t^3} dt$. Интегрируя по частям, приняв $u = \arcsin t$, $du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $dv = \frac{dt}{t^3}$, $v = -\frac{1}{2t^2}$, имеем

$$-2\int \frac{\arcsin t}{t^3} dt = \frac{\arcsin t}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \frac{\arcsin t}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$$

$$= \frac{\arcsin t}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} + C.$$

Таким образом,

$$\int \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = x \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} + C. \ \square$$

8.4 Задачи

№226. Доказать, что любая первообразная нечётной функции является чётной функцией.

Используя понятие обобщённой первообразной, найти неопределённый интеграл:

№227. [6, № 2166] $\int |x| dx$, $x \in \mathbb{R}$;

№228. [6, № 2171] $\int \max(1, x^2)\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Используя различные преобразования, а также, где необходимо, замену переменной, свести интегралы к табличным и вычислить их:

№229. $\int x\, e^{x^2} dx$;

№230. $\int \dfrac{dx}{\cos x}$;

№231. [6, № 1703] $\int \dfrac{dx}{\sin x}$;

№232. [6, № 1706] $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x}$;

№233. [6, № 1650] $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

№234. [6, № 1652] $\int \operatorname{th}^2 x dx$;

№235. [6, № 1733] $\int \dfrac{dx}{(x-1)(x+3)}$;

№236. $\int \dfrac{dx}{(x-a)(x-b)}$;

№237. $\int (1 + 2\operatorname{sh}^2 x)\, dx$;

№238. [6, № 1638] $\int \dfrac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$;

№239. [6, № 1643] $\int \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$;

№240. [6, № 1646] $\int \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$;

№241. [6, № 1668] $\int \dfrac{dx}{1+\cos x}$;

№242. [6, № 1745] $\int \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{3} dx$;

№243. $\int \dfrac{\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} 5x + 1}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} 5x} dx$;

№244. [6, № 1663] $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$;

№245. [6, № 1670] $\int \dfrac{dx}{1 + \sin x}$;

№246. [6, № 1767] $\int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx$;

№247. [6, № 1712] $\int \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$;

№248. [6, № 1725] $\int \dfrac{(1 + x)^2}{1 + x^2} dx$;

№249. [6, № 1726] $\int \dfrac{(2 - x)^2}{2 - x^2} dx$;

№250. [6, № 1737] $\int \dfrac{x dx}{(x + 2)(x + 3)}$;

№251. [6, № 1718] $\int \dfrac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

№252. [6, № 1682] $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$;

№253. [6, № 1688] $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$;

№254. [6, № 1692] $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$;

№255. [6, № 1711] $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx$;

№256. [6, № 1719] $\int \dfrac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$;

№257. [6, № 1720] $\int \dfrac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$;

№258. [6, № 1780] $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$;

Указание. Сделать тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

№259. [6, № 1782] $\int \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}\, dx \quad (a > 0)$;

Указание. Сделать тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

№260. [6, № 1782] $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\, dx \quad (a > 0)$;

Указание. На ОДЗ умножить и разделить на $\sqrt{a+x}$ и разбить на два интеграла.

№261. [6, № 1836] $\int \dfrac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0)$;

Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

№262. $\int x^2 \cdot \sin x dx$;

№263. [6, № 1794] $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x\, dx$;

№264. [6, № 1805] $\int x^2 \cdot \arccos x dx$;

№265. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx$;

№266. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0)$;

№267. $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx$;

№268. $\int \dfrac{x}{\sin^2 x} dx$;

№269. [6, № 1826] $\int \sin(\ln x) dx$;

№270. [6, № 1827] $\int \cos(\ln x) dx$;

№271. [6, № 1828] $\int e^{ax} \cos(bx) dx$;

№272. [6, № 1829] $\int e^{ax} \sin(bx) dx$.

8.5 Ответы и решения

226. Пусть $f(x)$ нечётная функция и $F(x)$ – её первообразная. Рассмотрим при любом допустимом x разность $G(x) = F(x) - F(-x)$. Покажем, что $G(x) \equiv 0$. В самом деле, $G'(x) = f(x) + f(-x) = 0$ (из-за нечётности), тогда $G(x) \equiv const$. Найдём эту константу: $G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0$. Итак, доказали, что $G(x) \equiv 0$.

227.

228.

229. $\int xe^{x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C.$

230. Умножим и разделим на $\cos x$ $(\neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

231. Имеем

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

232. *1-й способ.* Умножим и разделим на $\operatorname{ch} x$ $(\neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$$

2-й способ. Распишем, по определению, гиперболический косинус:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = 2\int \frac{d\,(e^x)}{(e^x)^2+1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} e^x + C.$$

233. Имеем

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

234. Имеем

$$\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

235. Имеем при $x \neq -3; 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-4} =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-2^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

236. Сформируем в числителе те выражения, которые присутствуют в виде сомножителей в знаменателе дроби, а затем произведём сокращение:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\int \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int \left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}(\ln|x-b| - \ln|x-a|) + C =$$

$$= \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| + C \quad (x \neq a,\, x \neq b,\, a \neq b).$$

237. Используя формулу для гиперболического косинуса двойного угла, получаем

$$\int (1 + 2\operatorname{sh}^2 x)\, dx = \int \operatorname{ch} 2x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x + C.$$

238. Заметим, что под корнем стоит полный квадрат:

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}}{x^3} dx =$$

$$= \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

239. Имеем

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| -$$

$$- \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

240. Имеем

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x+1} dx =$$

$$= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

241. Имеем

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

$(x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

242. Имеем

$$\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3} dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\frac{5x}{6}dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{6}dx = \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C.$$

243. Имеем при $x \neq 0$:

$$\int \frac{\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} 5x + 1}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} 5x}dx = \int \operatorname{cth}(5x + x)dx = \int \operatorname{cth} 6x dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch} 6x}{\operatorname{sh} 6x}dx = \frac{1}{6}\int \frac{d(\operatorname{sh} 6x)}{\operatorname{sh} 6x} = \ln|\operatorname{sh} 6x| + C.$$

244. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x + C$ $\left(x^2 < \frac{2}{3}\right)$.

245. Имеем

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2} =$$

$$= 2\int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2} = 2\int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)}{(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)^2} = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C.$$

246. Сделаем замену $t = 1 - 5x^2$, тогда $x^2 = \frac{1-t}{5}$ и получаем

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx = \frac{1}{2}\int x^2(1-5x^2)^{10}d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{5}\cdot t^{10}d\left(\frac{1-t}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{50}\int (t-1)t^{10}dt = \frac{1}{50}\int (t^{11} - t^{10})dt = \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{50}\left(\frac{(1-5x^2)^{12}}{12} - \frac{(1-5x^2)^{11}}{11}\right) + C.$$

247. При $x \neq 0$ поделим числитель и знаменатель на x^2: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$ и заметим, что $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx =$

$d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, а $x^2+\dfrac{1}{x^2} = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$, и тогда приходим к табличному интегралу

$$\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$$

Замечание. Подчеркнём, что мы нашли неопределённый интеграл на каждом из промежутков $x<0$ и $x>0$. Если поставить задачу нахождения неопределённого интеграла на всей числовой оси, то вначале необходимо найти хотя бы одну обобщённую первообразную (непрерывную в точке $x=0$), и затем добавить к ней произвольную константу. Пример нахождения такой обобщённой первообразной на примере функции $e^{|x|}$ был рассмотрен выше в тексте пособия (среди примеров). В данном случае, очевидно, подынтегральная функция не имеет никаких особенностей в точке $x=0$ (она непрерывна в этой точке), а это означает, что можно действовать так же, и такая обобщённая первообразная существует. При этом константы C_1 и C_2 слева и справа согласуются между собой так, что разрыв в виде скачка значений исчезает и в результате получается единая непрерывная в точке $x=0$ первообразная. Кратко в этой ситуации говорят, что «в точке $x=0$ первообразная доопределяется по непрерывности».

248. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{1+x^2}dx = \int dx + \int \frac{2xdx}{1+x^2} =$$

$$= x + \int \frac{d\left(x^2\right)}{1+x^2} = x + \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x + \ln\left(1+x^2\right)+C.$$

249. Разобьём интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx = -\int \frac{x^2-4x+4}{x^2-2}dx =$$

$$= -\int \frac{(x^2-2)-4x+6}{x^2-2}dx = -x+4\int \frac{xdx}{x^2-2} - 6\int \frac{dx}{x^2-2} =$$

$$= -x + 2\int \frac{d(x^2-2)}{x^2-2} - 6\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= -x + 2\ln|x^2-2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

250. *1-й способ*: имеем

$$\int \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C.$$

2-й способ:

$$\int \frac{(x+2)-2}{(x+2)(x+3)}dx = \int \frac{dx}{x+3} - 2\int \frac{dx}{x^2+5x+6} =$$

$$= \ln|x+3| - 2\int \frac{dx}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2} = \ln|x+3| -$$

$$-2\int \frac{d(x+\frac{5}{2})}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2} = \ln|x+3| - 2\ln\left|\frac{(x+\frac{5}{2})-\frac{1}{2}}{(x+\frac{5}{2})+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= \ln|x+3| - \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + C = \ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C.$$

251. *1-й способ*:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = \int \frac{\sin x\cos x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}dx = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C.$$

2-й способ:

$$\int \frac{(\sin x\cos x)/\cos^2 x}{(\sin^4 x + \cos^4 x)/\cos^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{(\operatorname{tg}^4 x + 1)\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^4 x + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

252. Имеем при $x \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^{-2}+1}} =$$

$$= -\int \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} = -\int \frac{d(\frac{1}{|x|})}{\sqrt{1+(\frac{1}{|x|})^2}} =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

253. Имеем при $0 < x < 1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

254. *1-й способ.* Сделаем подстановку $t = e^x$, тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{t^2\sqrt{1+t^2}} =$$

(замена $z = 1 + t^2$, затем замена $p = \sqrt{1+z}$, $z = p^2 - 1$, $dz = 2pdp$)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2}\int \frac{2pdp}{(p^2-1)p} = \int \frac{dp}{p^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right| + C.$$

2-й способ. Сделаем подстановку $t = e^{-x}$, тогда $x = -\ln t$, $dx = -\frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{-dt}{t\sqrt{1+t^{-2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = -\ln\left|e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right| + C =$$

$$= x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) + C.$$

255. Сделаем замену $t = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^{\frac{3}{2}} + C.$$

256. Разделим числитель и знаменатель на 4^x:

$$\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx = \int \frac{(\frac{3}{2})^x dx}{(\frac{3}{2})^{2x}-1} = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{d((\frac{3}{2})^x)}{((\frac{3}{2})^x)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\cdot\ln\left|\frac{(\frac{3}{2})^x-1}{(\frac{3}{2})^x+1}\right| + C = \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\cdot\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right| + C \quad (x\neq 0).$$

257. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Заметим, что $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$, поэтому приходим к интегралу

$$\int \frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

258. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (можно подстановку $x = \cos t$, где $t \in [0, \pi]$):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\,dt =$$

(так как $\cos t \geqslant 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin x)) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

259. Найдём ОДЗ: $\dfrac{a+x}{a-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-a, a)$. Сделаем подстановку $x = a\sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тогда $dx = a\cos t dt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ и приходим к интегралу

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{a+a\sin t}{a-a\sin t}}\,d(a\sin t) = a\int \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t\,dt$$

$$= a\int \frac{1+\sin t}{\sqrt{1-\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}\cos t\,dt = a\int \frac{1+\sin t}{|\cos t|}\cos t\,dt =$$

(так как $\cos t \geqslant 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$= a\int (1+\sin t)dt = a(t - \cos t) + C = a(\arcsin\frac{x}{a} -$$

$$-\cos(\arcsin\frac{x}{a})) + C = a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C =$$

$$= a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

260. Имеем

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

261. Имеем: $\dfrac{1}{b}\int \dfrac{dx}{x^2+\frac{a}{b}}$.

1) Если $ab>0$, то

$$\frac{1}{b}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{\frac{a}{b}})^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}} + C;$$

2) Если $ab<0$, то

$$\frac{1}{b}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}\right)^2} = \frac{\sqrt{|b|}}{2b\sqrt{|a|}}\cdot \ln\frac{\left|x-\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}\right|}{\left|x-\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}\right|} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} b}{2\sqrt{|ab|}}\cdot \ln\left|\frac{\sqrt{|b|}x-\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}x+\sqrt{|a|}}\right| + C.$$

262. Возьмём $u = x^2$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = 2xdx$, $v = -\cos x$, проинтегрируем:

$$\int x^2 \sin x dx = x^2\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)2xdx.$$

Интеграл упростился, проинтегрируем по частям ещё раз, выбирая аналогично $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$, и в результате имеем:

$$-x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right)$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

263. Проинтегрируем по частям, положив $u = \ln^2 x$, $v' = \sqrt{x}$:

$$\int \sqrt{x}\cdot \ln^2 x\, dx = \ln^2 x\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot \ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\cdot \ln x dx =$$

(проинтегрируем по частям, положив $u = \ln x$, $v' = \sqrt{x}$)

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C \quad (x > 0).$$

264. Положим $u = \arccos x$, $dv = x^2 dx$. Тогда $du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \dfrac{1}{3}x^3$. Интегрируя, имеем

$$\int x^2 \cdot \arccos x dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \int \frac{1}{3}x^3\left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 \cdot d(\sqrt{1-x^2}) =$$

(образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $v = \sqrt{1-x^2}$)

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3}\left(x^2\sqrt{1-x^2} - \int 2x\sqrt{1-x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3}\left(x^2\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C, \quad |x| < 1.$$

265. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = \dfrac{dx}{x^3}$. Тогда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = -\dfrac{1}{2x^2}$ и, интегрируя по частям, получим

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}dx = \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{((1+x^2)-x^2)dx}{x^2(1+x^2)}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

266. Положим $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$, откуда $du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$. Следовательно,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(|x|<a).$$

267. Положим $t=-\sqrt[3]{x+1}$, тогда $x=-1-t^3$, $dx=-3t^2dt$ и $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx=-3\int e^tt^2dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$-3\left(e^tt^2-2\int te^tdt\right)=-3(e^tt^2-2te^t+2e^t)+C,\ \text{где } t=-\sqrt[3]{x+1}.$$

268. Полагая $u=x$, $dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и, интегрируя по частям, получим

$$\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=-x\operatorname{ctg}x+\int\operatorname{ctg}x dx=$$

$$=-x\operatorname{ctg}x+\int\frac{\cos x dx}{\sin x}=-x\operatorname{ctg}x+\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=$$

$$=-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C\quad(x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}).$$

269. Рассмотрим оригинальный способ, который применяется, если надо вычислить сразу оба интеграла $I_1 = \int \sin(\ln x)dx$ и $I_2 = \int \cos(\ln x)dx$. Проинтегрируем каждый из интегралов по частям один раз:

$$I_1 = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x \cdot \sin(\ln x) - I_2,$$

$$I_2 = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x \cdot \cos(\ln x) + I_1,$$

откуда сразу находим

$$I_1 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C,$$

$$I_2 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C \quad (x > 0).$$

Способ отдельного вычисления этих интегралов рассмотрен в решении следующей задачи.

270. Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$, и интеграл принимает вид $\int e^t \cos t dt$. Проинтегрируем его дважды по частям:

$$I = \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = e^t \sin t +$$

$$+ \left(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \right) = e^t (\sin t + \cos t) - I.$$

Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C, окончательно находим:

$$I = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad x > 0.$$

Можно было вычислить этот интеграл и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$, тогда

$$I = \int \cos(\ln x)dx = x \cos(\ln x) - \int x \left(-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Ещё раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I,$$

откуда находим $I = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$.

271. Рассмотрим оригинальный способ, который применяется, если надо вычислить сразу оба интеграла $I_1 = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ и $I_2 = \int e^{ax}\sin(bx)dx$. Проинтегрируем каждый из интегралов по частям один раз:

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \cos bxd(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a} \cdot I_2,$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bxd(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a} \cdot I_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C,$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

272. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате получается уравнение относительно неизвестного интеграла. В данном случае положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = b\cos bxdx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и имеем:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Ещё раз проинтегрируем по частям образовавшийся интеграл, положив в нем, аналогично предыдущему, в качестве u тригонометрическую функцию, а в качестве v – показательную: $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = -b\sin bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и придем к результату:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\right)$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

Обозначим теперь исходный интеграл через I. Тогда имеем уравнение относительно I:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}I,$$

откуда выражаем

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx).$$

Окончательно, $\int e^{ax}\sin bx dx = \dfrac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

9 СЕМИНАР: Интегрирование рациональных функций

«Математические науки, естественные науки и гуманитарные науки могут быть названы, соответственно, науками сверхъестественными, естественными и неестественными».

Лев Давидович Ландау (1908–1968) – советский физик-теоретик, академик АН СССР. Лауреат Нобелевской премии по физике 1962 года.

Остановимся подробнее на некоторых из наиболее изученных классов интегрируемых функций и существующих методах их интегрирования. На данном семинаре речь пойдёт об интегрировании алгебраических рациональных функций, т. е. интегралах вида

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx,$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – алгебраические многочлены заданных степеней. Вначале рассмотрим на примерах некоторые из наиболее часто встречающихся типов интегралов от рациональных функций, и уже затем – общий подход к интегрированию таких дробей.

9.1 Простейшие классы интегралов

1. Интегрирование многочленов. Интеграл выписывается сразу как сумма первообразных от каждого члена плюс константа:

Пример 81. $\int \left(5x^6 + 2x^4 - x^2 + 3x - \frac{1}{4}\right) dx =$

$$= \frac{5}{7}x^7 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + C. \square$$

2. Интегралы вида $\int \frac{ax+b}{cx+\delta}dx$ $(ac \neq 0,\ cx+\delta \neq 0)$.

Интеграл от дробно-линейной функции легко сводится к сумме двух табличных интегралов выделением в подынтегральной дроби рациональной части.

Пример 82. Вычислить $\int \frac{2x+1}{3x-2}dx$.

Решение. При $x \neq \frac{2}{3}$ имеем:

$$\int \frac{\frac{2}{3}(3x-2)+\frac{7}{3}}{3x-2}dx = \frac{2}{3}\int dx + \frac{7}{9}\int \frac{d(3x-2)}{3x-2} =$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}\ln|3x-2| + C. \ \square$$

3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$.

Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене интегралы данного вида приводятся к одному из двух типов табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2+A^2} = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{t}{A} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{t^2-A^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-A}{t+A}\right| + C$$

(первый случай реализуется, когда выражение в знаменателе не имеет действительных корней, второй – когда знаменатель имеет два различных корня).

Пример 83. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Решение. Выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C. \square$$

Пример 84. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$.

Решение. Выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2-25} = \frac{1}{10}\cdot\ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right| + C$$

$(x \neq -2; 8)$ $\square$.

Наряду с рассмотренным способом, для вычисления интегралов $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ $(a \neq b)$ можно воспользоваться тождеством: $a - b = (x+a) - (x+b)$.

Пример 85. Вычислить $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

Решение. Умножим и разделим на $a-b$ и сформируем в числителе выражения $(x+a)$ и $(x+b)$:

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{a-b} (\ln|x+b| - \ln|x+a|) + C =$$

$$= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C \quad (x \neq -a; -b). \ \square$$

К этой же группе относится интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0, x \neq \pm a).$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+a)^2 (x+b)^2}$ $(a \neq b)$.

Интегралы указанного вида можно вычислять при помощи тождества

$$1 \equiv \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b} \right)^2.$$

Пример 86. Вычислить $I = \int \frac{dx}{(x+2)^2 (x-3)^2}$.

Решение. Имеем при $x \neq -2; 3$:

$$I = \frac{1}{25} \int \frac{((x+2)-(x-3))^2}{(x+2)^2 (x-3)^2} dx = \frac{1}{25} \int \left(\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25} \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\ln|x-3| + \frac{2}{125}\ln|x+2| + C. \quad \square$$

5. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0)$.

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной $2ax+b$ знаменателя дроби и последующим разбиением на два интеграла:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

где интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ уже рассматривался выше.

Пример 87. Вычислить $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Так как $(x^2+2x+5)' = 2(x+1)$, имеем:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{(x+1)+1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \square$$

Пример 88. Вычислить $\int \frac{x+2}{x^2+2x-3}dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{(x+1)+1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x-3} +$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C. \square$$

6. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ $(a \neq 0)$.

Один из методов вычисления этого вида интегралов приведён ниже:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{xdx}{(a^2+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \int\frac{dx}{x^2+a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C.$$

7. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $(a \neq 0,\ n \geqslant 2,\ n \in \mathbb{N})$.

Данные интегралы можно вычислить тригонометрической подстановкой $x = a\operatorname{tg}t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 89. Вычислить $\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}$.

Решение. Положим $x = \sqrt{2}\operatorname{tg}t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}dt$, $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$ и получаем

$$\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\,dt}{\cos^2 t\cdot(2+2\operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^4 t}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) + C. \ \square$$

8. Интегралы вида

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^2} dx \quad (D = b^2 - 4ac < 0;\ a \neq 0).$$

Для вычисления этого вида интегралов надо представить линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трёхчлена и некоторой константы и затем разбить интеграл на два интеграла.

Пример 90. Вычислить $\int \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.

Решение. Так как $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, то имеем

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{(x^2+x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})^2} =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ \square$$

9. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n} dx \quad (D = b^2 - 4c < 0;\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

Выделением полного квадрата $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$ и заменой $z = x + \frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n = \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z = a \operatorname{tg} u$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям (см. [17, п. 3.6]).

Вычисление интегралов более общего вида

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \quad (D = b^2 - 4ac < 0;\ a \neq 0)$$

рассмотрено в [17, п. 3.7].

10. Метод алгебраических преобразований (разные приёмы) Так как основной подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных – всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов.

Пример 91. Вычислить $\int x(1-2x)^{37} dx$.

Решение. Преобразуем интеграл к виду:

$$\int \left(-\frac{1}{2}(1-2x) + \frac{1}{2}\right)(1-2x)^{37} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{38} dx + \frac{1}{2}\int (1-2x)^{37} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2x)^{38} d(1-2x) - \frac{1}{4}\int (1-2x)^{37} d(1-2x) =$$

$$= \frac{1}{156}(1-2x)^{39} - \frac{1}{152}(1-2x)^{38} + C. \square$$

Пример 92. [6, № 1767] Вычислить $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1 - 5x^2$, откуда $x^2 = \dfrac{1-t}{5}$, $xdx = -\dfrac{1}{10}dt$, и в результате приходим к интегралу:

$$\int \left(\frac{1-t}{5}\right) t^{10} \left(-\frac{dt}{10}\right) = \frac{1}{50}\int t^{11} dt - \frac{1}{50}\int t^{10} dt = \frac{t^{12}}{600} - \frac{t^{11}}{550} + C =$$

$$= \frac{(1-5x^2)^{12}}{600} - \frac{(1-5x^2)^{11}}{550} + C. \ \square$$

Пример 93. Вычислить $\int \dfrac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

Решение. Выделяя полный квадрат, получим $x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2+1)^2 + 4$. Выполним подстановку $t = x^2 + 1$, тогда $xdx = \dfrac{dt}{2}$. Переходя к новой переменной интегрирования, получим

$$\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2} + C. \ \square$$

Пример 94. Вычислить $\int \dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. При $x \neq 0$ поделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$$

(в точке $x = 0$ первообразные доопределяются предельными значениями). $\square$

Пример 95. Вычислить $\int \dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{1+x^2}dx = \int dx + \int \frac{2xdx}{1+x^2} =$$

$$= x + \int \frac{d\left(x^2\right)}{1+x^2} = x + \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x + \ln\left(1+x^2\right) + C. \ \square$$

Эти и другие приёмы осваиваются на практике при вычислении различных видов интегралов (см., в том числе, задачи к данному семинару).

9.2 Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит *Г. Лейбницу* (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т. е. функций вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.

1. *Интегрирование неправильной дроби.* Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$, (иными словами, дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильная), то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ вначале выделяют целую часть – многочлен $S(x)$, т. е. представляют дробь в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Таким образом, интегрирование дробно-рациональной функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в общем случае сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

2. *Интегрирование правильной дроби.* Рассмотрим интегрирование правильной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, в которой степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Оно основано на представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей.

1) Первое, что необходимо сделать, – это выписать разложение дроби в сумму элементарных дробей. Вид этого разложения зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Известно, что алгебраический многочлен любой степени раскладывается на сомножители линейного $(x - a)$ и (или) квадратичного вида $x^2 + bx + c$. Предположим, в разложении $Q(x)$ на множители присутствует сомножитель линейного вида в n-

й степени: $(x-a)^n$ (a – действительный корень многочлена кратности n). Тогда ему будет соответствовать сумма ровно n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+...+\frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad (1)$$

где A_k $(k=\overline{1,n})$ – некоторые постоянные. Если сомножителей линейного типа в разложении многочлена $Q(x)$ несколько, то каждому из них соответствует аналогичная сумма. Каждому сомножителю квадратичного вида в m-й степени $(x^2+bx+c)^m$, где трехчлен x^2+bx+c не имеет действительных корней, соответствуют, в свою очередь, m простейших дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+bx+c)^3}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+bx+c)^m}, \qquad (2)$$

где M_i, N_i $(i=\overline{1,m})$ – постоянные.

Таким образом, выписывается представление дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде конечной суммы элементарных дробей вида (1) и (2):

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+...+\frac{A_n}{(x-a)^n}+...$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+bx+c)^3}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+bx+c)^m}. \qquad (3)$$

2) Далее методом неопределённых коэффициентов находятся постоянные A_k, M_i, N_i. Для этого все простейшие дроби в правой части равенства (3) приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x зависят от неизвестных A_k, M_i, N_i. Поскольку две рациональные дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ и $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т. е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда

равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределенных коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение) и, таким образом, неопределенные ранее коэффициенты оказываются найденными.

3) После этого найденные значения коэффициентов A_k, M_i, N_i подставляются в разложение (3), и интегрирование рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ оказывается в результате сведено к интегрированию суммы элементарных дробей (3).

В итоге интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде с помощью некоторой рациональной функции, логарифма или арктангенса.

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Пример 96. Представить в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами (в общем виде) рациональную функцию

$$\text{а)}\ \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}; \quad \text{б)}\ \frac{3x^2-1}{x^4(x^2-x+5)^3}.$$

Решение. а) Согласно рекомендациям выше, искомое представление «правильной» дроби имеет вид

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+3)} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}.$$

б) Имеем

$$\frac{3x^2-1}{x^4(x^2-x+5)^3} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{x^2-x+5} + \frac{Kx+L}{(x^2-x+5)^2} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+5)^3}.$$

Пример 97. Вычислить $\int \dfrac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение подынтегральной функции в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

Приводя дроби в правой части (1) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1). \qquad (2)$$

Приведём многочлен в правой части к стандартному виду, упорядочив степени x в порядке убывания:

$$x = (A+B)x^2 + (C-B-4A)x + (4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов в левой и правой частях равенства, получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B-4A=1, \\ 4A-2B+C=0, \end{cases}$$

решая которую находим неопределённые коэффициенты $A = -\dfrac{1}{9}$, $B = \dfrac{1}{9}$, $C = \dfrac{2}{3}$. Наконец, подставим найденные коэффициенты в разложение (1) и проинтегрируем:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3(x-2)} + C \quad (x \neq -1; 2).$$

Замечание. С другой стороны, бывает удобно в равенство $P(x) = T(x)$ подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа, чаще всего – действительные корни знаменателя $Q(x)$. В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим данный приём к предыдущему примеру. Для этого, не приводя многочлен в правой части этого тождества (2) к стандартному виду, положим в нём последовательно вначале $x = 2$ и получим $2 = 3C$, откуда $C = \dfrac{2}{3}$. Затем положим $x = -1$, получив, что $-1 = 9A$, откуда $A = -\dfrac{1}{9}$. Наконец, положим в (2) $x = 0$ (не корень многочлена $Q(x)$, но тоже достаточно удобное для подстановки число). В результате имеем $0 = 4A - 2B + C$, откуда с учётом найденных ранее A и C находим $B = \dfrac{1}{9}$. И далее интегрируем по описанной выше схеме.

9.3 Метод М. В. Остроградского

Ещё один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, носит название метода Остроградского. Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.[1]

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплексные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределенных коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет. Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. То есть каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально

[1] *Остроградский Михаил Васильевич* (1801– 1861) – русский математик, член Петербургской АН, один из основателей Петербургской математической школы. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике.

он имел кратность n ($n \in N$), войдёт с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n-1)$ в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введём в рассмотрение ещё два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределёнными коэффициентами, причём их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \qquad (1)$$

Чтобы с её помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \qquad (2)$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределённые коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (1). Обратимся к примеру.

Пример 98. [6, № 1891] Вычислить $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^3$. Находим, что $Q_2(x) = (x-1)(x+1)$ и тогда $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x+1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ – квадратный трёхчлен, записанный в общем виде: $P_1(x) = ax^2 + bx + c$. Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ – многочлен первой степени $P_2(x) = \delta x + e$. Следовательно, имеем пять неопределённых коэффициентов a, b, c, δ, e. Формула Остроградского примет вид

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}\right)' + \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2+bx+c)((x+1)^2+2(x-1)(x+1))}{(x-1)^2(x+1)^4}$$

$+\dfrac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}$. Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) + 2+}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$\frac{+(\delta x+e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Итак, при всех $x \neq \pm 1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x \equiv (2ax+b)(x^2-1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) + (\delta x+e)(x^2-1)(x+1).$$

Найдём коэффициенты a, b, c, δ, e методом неопределённых коэффициентов (сняв временно ограничения $x \neq \pm 1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$x^4 : 0 = \delta$

$x^3 : 0 = -a + \delta + e$

$x^2 : 0 = -2b + a + e - \delta$

$x^1 : 1 = -2a - 3c + b - e - \delta$

$x^0 : 0 = -b + c - e$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим

$$a = b = e = -\frac{1}{8}, \quad c = -\frac{1}{4}, \quad \delta = 0.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}.$$

Осталось вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$

Итак, окончательно имеем ($x \neq \pm 1$):

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \square$$

9.4 Задачи

Используя подходящие преобразования, свести к табличным следующие интегралы от рациональных дробей:

№273. $\int \frac{dx}{3-5x}$;

№274. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^{100}}$;

№275. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6}$;

№276. $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

№277. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$;

№278. $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$;

№279. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)}$;

№280. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Раскладывая в сумму простейших дробей и используя метод неопределённых коэффициентов, вычислить интегралы:

№281. [6, № 1867] $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

№282. [6, № 1877] $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

№283. [6, № 1881] $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

№284. $\int \frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$.

Используя метод Остроградского, вычислить интегралы:

№285. [6, № 1892] $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$;

№286. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

Применяя разные приёмы, вычислить интегралы:

№287. [6, № 1870] $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$;

№288. [6, № 1882] $\int \frac{x dx}{x^3-1}$;

№289. [6, № 1886] $\int \frac{dx}{x^6+1}$;

№290. [6, № 1903] $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$;

№291. [6, № 1908] $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}$;

№292. [6, № 1909] $\int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2}$;

№293. [6, № 1913] $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

9.5 Ответы и решения

273. Имеем

$$\int \frac{dx}{3-5x} = \int \frac{-\frac{1}{5}d(-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5}\int \frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x|+C.$$

274. Выполним подстановку $t = x+2$, в результате которой степень суммы оказывается не в знаменателе, а в числителе дроби, что удобнее для вычисления интеграла:

$$\int \frac{(t-2)^2dt}{t^{100}} = \int \frac{t^2-4t+4}{t^{100}}dt = \int \left(t^{-98} - 4t^{-99} + 4t^{-100}\right) dt =$$

$$= -\frac{t^{-97}}{97} + 4\cdot\frac{t^{-98}}{98} - 4\cdot\frac{t^{-99}}{99} + C =$$

$$= -\frac{1}{97(x+2)^{97}} + \frac{2}{49(x+2)^{98}} - \frac{4}{99(x+2)^{99}} + C.$$

275. Приведём интеграл к виду $\int \frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6}$ и положим $t = \frac{x-1}{x}$, тогда имеем

$$\int \frac{(1-t)^7}{t^6}dt = \int \frac{1-7t+21t^2-35t^3+35t^4-21t^5+7t^6-t^7}{t^6}dt$$

$$= -\frac{1}{5t^5} + \frac{7}{4t^4} - \frac{7}{t^3} + \frac{35}{2t^2} - \frac{35}{t} - 21\ln|t| + 7t - \frac{t^2}{2} + C,$$

где $t = \frac{x-1}{x}$ $(x \neq 0; 1)$.

276. Так как

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)},$$

то имеем $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

277. Выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Подставляя полученное представление под знак интеграла, вычисляем интеграл:

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

278. Имеем

$$\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} = \int \frac{x^2dx}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^3(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u(1-u)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-u}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{(1-u)^2} + \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right)du = -\frac{1}{3(1-u)} +$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{3(x^3-1)} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1-x^3}\right| + C\ (x \neq 0; 1).$$

279. При $x \neq 0; \pm\sqrt{2}$ имеем:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4(x^2-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2(u-2)} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{(u-2)-u}{u^2(u-2)}du = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u(u-2)} =$$

$$\frac{1}{4u} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| + C = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2}\right| + C.$$

280. При $x \neq -2; 3$ имеем:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int \left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25}\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\ln|x-3| + \frac{2}{125}\ln|x+2| + C.$$

281. При $x \neq -1; -2; -3$ имеем:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}\right)dx.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители, приходим к тождеству

$$x \equiv (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах справа и слева, получаем

$$\begin{aligned} x^2:&\quad 0 = A+B+C,\\ x^1:&\quad 1 = 5A+4B+3C,\\ x^0:&\quad 0 = 6A+3B+2C. \end{aligned}$$

Решая систему, находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = -\frac{3}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

282. При $x \neq -1$ имеем:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

откуда методом неопределённых коэффициентов находим

$$A = C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C.$$

283. Имеем

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \right) dx.$$

Неопределённые коэффициенты находим из тождества

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C,$$

получив $A = -B = \dfrac{1}{3}$, $C = \dfrac{2}{3}$. Подставляя в интеграл, находим

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{(x-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int \frac{d((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

284. Разложение подынтегральной дроби ищем в виде

$$\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества

$$3x^2-x+2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -B+C=0, \\ 2A-C+D+B=3, \\ C-B+E-D=-1, \\ A-C-E=2. \end{cases}$$

Полагая $x = 1$, находим $A = 1$. Решая систему с учётом $A = 1$, определяем остальные коэффициенты: $B = C = -1$, $D = 1$, $E = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^2 - x + 2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C \quad (x \neq 1).$$

285. Согласно формуле Остроградского,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3+1} + D\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) +$$
$$+ (Ex+F)(x^4 + x^3 + x + 1),$$

откуда $x^5 : 0 = D + E$,

$x^4 : 0 = -A - D + E + F$,

$x^3 : 0 = -2B + D + F$,

$x^2 : 0 = -3C + D + E$,

$x^1 : 0 = 2A - D + E + F$,

$x^0 : 1 = B + D + F$.

Решая систему, находим $A = C = 0$, $B = \dfrac{1}{3}$, $D = -E = \dfrac{2}{9}$, $F = \dfrac{4}{9}$. Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \quad (x \neq -1).$$

286. Поскольку $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2+x+1)^2$, то разложение, согласно формуле Остроградского, ищем в виде

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx,$$

откуда, дифференцируя равенство и приводя дроби к общему знаменателю, получаем тождество

$1 \equiv A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(x^2+x+1)(Cx+D),$ а значит

$$\begin{aligned}
&x^3 : 0 = C,\\
&x^2 : 0 = -A + D + C,\\
&x^1 : 0 = D - 2B + C,\\
&x^0 : 1 = A - B + D.
\end{aligned}$$

Отсюда находим $A = D = \dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$, $C = 0$ и, подставляя в формулу Остроградского, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

287. Выделяя целую часть, получаем

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4} = \int dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} dx =$$

(так как $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$, положим $t = x^2$ и получим)

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4},$$

откуда находим $A = -\dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{16}{3}$. Поэтому

$$\int \frac{5x^2+4dx}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{16}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Ответ: $x + \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{8}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$.

288. Имеем

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Разложим на элементарные дроби:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

откуда находим $A = -B = C = \dfrac{1}{3}$, тогда

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

289. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{dx}{x^6+1} = \frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)} = \frac{x^4+1}{2(x^6+1)} + \frac{1-x^4}{2(x^6+1)} =$$

$$= \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} - \frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}.$$

Первые два слагаемых интегрируются легко, поэтому найдём разложение на простые дроби только последнего слагаемого. Поскольку $x^4-x^2+1 = (x^4+2x^2+1)-3x^2$, то получаем:

$$\frac{1-x^2}{2(x^4-x^2+1)} = \frac{1-x^2}{2(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} =$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1},$$

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \equiv (Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1)$$

откуда методом неопределённых коэффициентов приходим к системе:

$x^3 : 0 = A + C,$
$x^2 : -\frac{1}{2} = -\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D,$
$x^1 : 0 = A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D,$
$x^0 : \frac{1}{2} = B + D.$

Отсюда $A = -C = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $B = D = \dfrac{1}{4}$, поэтому

$$\frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + C.$$

290. *1-й способ.* Положим $t = x - 1$, тогда приходим к простому интегралу $\int \dfrac{(t+1)^3\,dt}{t^{100}}$.

2-й способ. Раскладывая по формуле Тейлора функцию x^3 по целым неотрицательным степеням $(x-1)$, получаем

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

Поэтому при $x \neq 1$ имеем

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}} = \int \frac{(1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3)dx}{(x-1)^{100}} =$$
$$= \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{99}} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^{98}} + \int \frac{dx}{(x-1)^{97}} =$$
$$= -\frac{1}{99(x-1)^{99}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{96(x-1)^{96}} + C.$$

291. Сделаем подстановку $t = x^5$, тогда $5x^4 dx = dt$ и, переходя под знаком интеграла к новой переменной интегрирования, получаем

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{(t^2 - 10)^2}.$$

Далее возможны разные способы решения.

1-й способ (разложение на простейшие дроби). Перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t^2-10)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t-\sqrt{10})^2(t+\sqrt{10})^2}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(t-\sqrt{10})^2(t+\sqrt{10})^2} \equiv \frac{A}{t-\sqrt{10}} + \frac{B}{(t-\sqrt{10})^2} + \frac{C}{t+\sqrt{10}} + \frac{D}{(t+\sqrt{10})^2}.$$

Приводя справа дроби к общему знаменателю, приравниваем многочлены, расположенные слева и справа в числителях:

$$1 \equiv A(t-\sqrt{10})(t+\sqrt{10})^2 + B(t+\sqrt{10})^2 + C(t-\sqrt{10})^2(t+\sqrt{10}) +$$
$$+D(t-\sqrt{10})^2.$$

При $t=\sqrt{10}$ получаем $1 = 40B \Rightarrow B = \dfrac{1}{40}$,
при $t=-\sqrt{10}$ получаем $1 = 40D \Rightarrow D = \dfrac{1}{40}$,
приравнивая, дополнительно, коэффициенты при t^3 и t^0, получаем:
$t^3 : 0 = A + C$,
$t^0 : 1 = -10\sqrt{10}A + 10B + 10\sqrt{10}C + 10D$,
т. е. $C = \dfrac{1}{40\sqrt{10}}$, $A = -\dfrac{1}{40\sqrt{10}}$.

Подставляя полученное разложение в интеграл, находим

$$\frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t-\sqrt{10})^2(t+\sqrt{10})^2} = -\frac{1}{200\sqrt{10}}\int \frac{d(t-\sqrt{10})}{t-\sqrt{10}} +$$

$$\frac{1}{200}\int \frac{d(t-\sqrt{10})}{(t-\sqrt{10})^2} + \frac{1}{200\sqrt{10}}\int \frac{d(t+\sqrt{10})}{t+\sqrt{10}} + \frac{1}{200}\int \frac{d(t+\sqrt{10})}{(t+\sqrt{10})^2} =$$

$$= \frac{1}{200\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t+\sqrt{10}}{t-\sqrt{10}}\right| - \frac{1}{200(t-\sqrt{10})} - \frac{1}{200(t+\sqrt{10})} + C =$$

$$= -\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right) + C \quad (x \neq \pm\sqrt[10]{10}).$$

2-й способ (метод Остроградского). Имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2-10)^2} = \frac{at+b}{t^2-10} + \int \frac{ct+d}{t^2-10}dt.$$

Дифференцируя и применяя метод неопределённых коэффициентов, находим

$$\begin{cases} a = d = -\dfrac{1}{20}, \\ b = c = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2-10)^2} = -\frac{1}{20}\cdot\frac{t}{t^2-10} - \frac{1}{20}\int\frac{dt}{t^2-10} \quad \text{и т. д.}$$

3-й способ (метод алгебраических преобразований). Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{dt}{(t^2-10)^2} = \frac{1}{40}\int\frac{((t+\sqrt{10})-(t-\sqrt{10}))^2}{(t-\sqrt{10})^2(t+\sqrt{10})^2} =$$

$$= \frac{1}{40}\int\left(\frac{1}{(t-\sqrt{10})^2} - \frac{2}{t^2-10} + \frac{1}{(t+\sqrt{10})^2}\right)dt \quad \text{и т. д.}$$

292. Положим $t = x^4$, тогда $4x^3dx = dt$ и получаем

$$\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2} = \frac{1}{4}\int\frac{t^2dt}{t^2+3t+2} = \frac{1}{4}\int dt - \frac{1}{4}\int\frac{3t+2}{t^2+3t+2}dt =$$

$$= \frac{t}{4} - \frac{1}{4}\int\frac{3(t+\frac{3}{2})-\frac{5}{2}}{(t+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{2}}dt = ... = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4} + C.$$

293. Имеем при $x \neq 0$:

$$\int\frac{dx}{x(x^{10}+2)} = \int\frac{x^9dx}{x^{10}(x^{10}+2)} = \frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10})}{x^{10}(x^{10}+2)} =$$

(положим $t = x^{10}$)

$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{10}\int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}\right) dt = \frac{1}{10}\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{20}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^{10}}{x^{10}+2}\right| + C.$$

10 СЕМИНАР: Интегрирование иррациональностей

«Когда жизнь экзаменует, первыми сдают нервы».
Студенческий анекдот.

Домашнее задание (из этой книги):
292, 293, 295, 297–301, 304–310.

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе рационализирующих подстановок, т. е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Назовём этот подход методом рационализации подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

Обратимся вначале к интегрированию алгебраических иррациональностей.

10.1 Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx, \;\; \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Здесь под $R(x, y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т. е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m: $R(x, y) = \dfrac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$. При этом многочленом степени n с двумя переменными x и y называется выражение вида

$$P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{0n}y^n + a_{(n-1)1}x^{n-1}y + a_{1(n-1)}xy^{n-1} + ...$$

$$+a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij}x^i y^j,$$

$i, j = \overline{0, n}$, где суммарная степень $i+j$ каждого одночлена неотрицательна и не превышает n, причём среди коэффициентов

$a_{n0}, a_{(n-1)1}, a_{(n-2)2}, ..., a_{0n}$ есть хотя бы один, отличный от нуля.

Дробно-линейной иррациональностью назовём функцию вида $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ – постоянные, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. В случае $c = 0$, $a \neq 0$ получим, в частности, *линейную иррациональность* $R(x, \sqrt[n]{Ax+B})$, где $A = \dfrac{a}{d}$, $B = \dfrac{b}{d}$. Рационализация дробно-линейных иррациональностей $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ осуществляется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx,$$

где рациональные степени $\frac{p_i}{q_i}$ ($p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$) – несократимые дроби, находятся с помощью рационализируюшей подстановки $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где $n =$НОК$(q_1, q_2, ..., q_k)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 99. $\int \dfrac{\sqrt{x+9}}{x} dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеется линейная иррациональность $\sqrt{x+9}$, поэтому положим $t = \sqrt{x+9}$, тогда $x = t^2 - 9$, $dx = 2tdt$ и, переходя к новой переменной, получим ($x \geq -9$, $x \neq 0$)

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2-9} = 2\int \frac{(t^2-9)+9}{t^2-9} dt =$$

$$= 2\int dt + 18\int \frac{dt}{t^2-9} = 2t + 3\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+9} + 3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C. \square$$

Пример 100. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. Имеем НОК$(2,3) = 6$, поэтому для рационализации подынтегральной функции применим подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, в результате освобождаясь от обоих радикалов. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$ и интеграл от иррациональной функции оказывается сведённым к интегралу от рациональной функции:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C \quad (x > 0). \ \square$$

10.2 Интегрирование квадратичных иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a, b, c – некоторые действительные постоянные, $a \neq 0$.[1] Обратимся вначале к некоторым важным частным классам таких интегралов.

10.2.1 Важные частные случаи квадратичных иррациональностей

1) *Интегралы вида* $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов

$$\int \sqrt{A^2-t^2}\,dt \quad \text{или} \quad \int \sqrt{t^2+A}\,dt.$$

[1] При этом будем дополнительно считать, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет кратного корня, т. е. не представим в виде $a(x-x_1)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным.

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c}\, dx.$$

Далее, если $a > 0$, то подстановкой $t = x + \dfrac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду $\int \sqrt{t^2+A}$ (с точностью до коэффициента); если же $a < 0$ и $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ аналогичной подстановкой получаем интеграл вида $\int \sqrt{A^2-t^2}\, dt$. Вычислим эти интегралы.

Пример 101. $\int \sqrt{A^2-t^2}\, dt$ $(A > 0)$.

Интегрируя по частям, положим $u = \sqrt{A^2-t^2}$, $dv = dt$, откуда $du = -\dfrac{tdt}{\sqrt{A^2-t^2}}$, $v = t$. Следовательно,

$$\int \sqrt{A^2-t^2}\, dt = t\sqrt{A^2-t^2} - \int \frac{-t^2dt}{\sqrt{A^2-t^2}} =$$

$$= t\sqrt{A^2-t^2} - \int \frac{A^2-t^2-A^2}{\sqrt{A^2-t^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{A^2-t^2} - \int \sqrt{A^2-t^2}dt + A^2 \arcsin\frac{t}{A}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int \sqrt{A^2-t^2}\, dt = \frac{t}{2}\sqrt{A^2-t^2} + \frac{A^2}{2}\arcsin\frac{t}{A} + C \quad (|t| \le A). \ \Box$$

Пример 102. $\int \sqrt{t^2+A}\, dt$ $(A \ne 0)$.

Проинтегрируем по частям. Положим $u = \sqrt{t^2+A}$, $dv = dt$. Тогда

$$I = \int \sqrt{t^2+A}\, dt = t\sqrt{t^2+A} - \int \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+A}} = t\sqrt{t^2+A} - \int \frac{t^2+A-A}{\sqrt{t^2+A}}dt$$

$$= t\sqrt{t^2+A} + A\ln|t+\sqrt{t^2+A}| + I.$$

Откуда находим окончательно, выражая I:

$$I = \int \sqrt{t^2+A}\, dt = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right| + C \quad (t^2+A \ge 0). \ \Box$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 103. Вычислить $\int \sqrt{x^2+8x+25}\,dx$.

Решение. Выделяя полный квадрат, получим

$$\int \sqrt{(x^2+8x+16)+9}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{(x+4)^2+9}\,dx = \int \sqrt{(x+4)^2+9}\,d(x+4) =$$

$$= \frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25} + \frac{9}{2}\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}\right| + C. \ \square$$

Пример 104. $\int \sqrt{-x^2+2x+8}\,dx$.

Решение. Выделяя под радикалом полный квадрат, при $x \in [-2; 4]$ имеем

$$\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+8} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + C. \ \square$$

2) *Интегралы вида* $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

Интегралы данного вида вычисляются выделением в выражении $Ax+B$ производной $2ax+b$ от подкоренного выражения с последующим разбиением в сумму двух табличных интегралов:

$$\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,d(ax^2+bx+c) +$$

$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{3a}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\cdot I,$$

где интеграл I вычислялся выше.

Пример 105. Найти $\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решение. Так как $(x^2+x+1)' = 2x+1$, то имеем

$$\int ((2x+1)+6)\sqrt{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx + 6\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{x^2+x+1}\,d(x^2+x+1) + 6\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+x+1)^3}+$$

$$+6\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|\right)+C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+x+1)^3}+3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C. \ \square$$

3) *Интегралы вида* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Интегралы указанного вида путём выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена ax^2+bx+c под знаком радикала приводятся к табличным интегралам

$$\int \frac{dt}{\sqrt{A^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{A}+C \text{ или } \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+A}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+C.$$

Пример 106. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем интеграл к виду

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C, \quad x\in\left(\frac{1}{3};1\right). \ \square$$

Пример 107. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем квадратный трёхчлен к виду $(x+1)^2+4$. В результате приходим к интегралу

$$\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C. \ \square$$

4) *Интегралы вида* $\int \dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Интегралы указанного вида чаще всего вычисляются выделением в числителе дроби производной от подкоренного выражения:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 108. Найти $\int \dfrac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} -$$

$$-13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C,$$

где $x \in \left[-2-\frac{\sqrt{14}}{2}; -2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right]$. $\square$

Пример 109. Найти $\int \dfrac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d(-x^2+6x-8)}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C, \quad x \in (2;4). \ \square$$

5) *Интегралы вида* $\int \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ – алгебраический многочлен n-й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени с неопределёнными коэффициентами, λ ещё один неопределённый коэффициент. Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda,$$

из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 110. Найти $\int \dfrac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} +$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

откуда, умножая на $2\sqrt{x^2+x+1}$, получим

$$2(x^3-2)=(4ax+2b)(x^2+x+1)+(ax^2+bx+c)(2x+1)+2\lambda.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c и λ имеем систему уравнений

$x^3: \quad 2=4a+2a,$

$x^2: \quad 0=4a+2b+a+2b,$

$x^1: \quad 0=4a+2b+b+2c,$

$x^0: -4=2b+c+2\lambda,$

откуда определяем $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5}{12}$, $c=-\frac{1}{24}$, $\lambda=-\frac{25}{16}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{25}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.\ \square$$

6) *Интегралы вида* $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(x\in\mathbb{N})$.

Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n=1)$ берутся с помощью подстановки $t=\frac{1}{x-\alpha}$. В результате они приводятся к интегралам типа $\int\frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ также вычисляются с помощью замены $t=\frac{1}{x-\alpha}$. Тогда $x=\frac{1}{t}+\alpha$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2}$ и получаем, что

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$= -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}$$

(т. е. интеграл сводится к интегралу предыдущего типа).

Пример 111. $\int \dfrac{dx}{x \cdot \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$.

Решение. Положим $t = \dfrac{1}{x}$, тогда $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и, подставляя в интеграл, получим (при $t > 0$):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2} - \frac{2}{t} + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}}$$

$$= -\ln\left|t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5}\right| + C \ (x > 0). \ \square$$

7) *Интегралы вида* $\int \dfrac{dx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы этого типа при $bc \neq 0$ вычисляются подстановкой $t = (\sqrt{bx^2 + c})' = \dfrac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}}$. Тогда $x^2 = \dfrac{ct^2}{b(b - t^2)}$, $xdx = \dfrac{ctdt}{(t^2 - b)^2}$ и, умножая и деля подынтегральную дробь на bx^2, получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a)^n\sqrt{bx^2 + c}} = \frac{1}{b}\int \frac{1}{x^2(x^2 + a)^n}\left(\frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}}\right) xdx =$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{1}{\frac{ct^2}{b(b-t^2)}\left(\frac{ct^2}{b(b-t^2)} + a\right)^n} \cdot t \cdot \frac{ctdt}{(t^2 - b)^2}.$$

Пример 112. Найти $\int \dfrac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$.

Решение. Положим $t = \left(\sqrt{x^2 + 2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, тогда $x^2 = \dfrac{2t^2}{1 - t^2}$, $x^2 + 1 = \dfrac{t^2 + 1}{1 - t^2}$, $xdx = \dfrac{2tdt}{(1 - t^2)^2}$. Для удобства преобразований умножим и разделим подынтегральное выражение на x^2:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{x^2+2} \cdot x^2 \cdot (x^2+1)} = \int \frac{t \cdot \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C. \square$$

8) *Интегралы вида* $\int \dfrac{xdx}{(x^2+a)^n\sqrt{bx^2+c}}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы данного вида при $bc \neq 0$ рационализируются подстановкой $t = \sqrt{bx^2+c}$. Тогда $x^2 = \dfrac{t^2-c}{b}$, $xdx = \dfrac{tdt}{b}$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n\sqrt{bx^2+c}} = \frac{1}{b}\int \frac{t\,dt}{\left(\frac{t^2-c}{b}+a\right)^n \cdot t}.$$

Пример 113. Найти $\int \dfrac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2+2}$, тогда $x^2 = t^2 - 2$, $xdx = tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C. \square$$

9) *Интегралы вида* $\int \dfrac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $R(x) = \dfrac{T_k(x)}{Q_m(x)}$ – рациональная функция, $T_k(x), Q_m(x)$ – целые алгебраические многочлены соответственно степеней k и m. Выделяя при $k \geq m$ из рациональной дроби $R(x)$ целую часть – многочлен $S(x)$

$$R(x) = S_{k-m}(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (n < m)$$

и раскладывая полученную правильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей, получаем, что интегрирование функций

$\dfrac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению рассмотренных выше интегралов трёх типов:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, а вычисление последнего типа интегралов при $n \in \mathbb{N}$ рассматривается, например, в [17].

10) *Интегралы вида*

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) dx.$$

Рассмотрим вычисление этих интегралов с помощью тригонометрических подстановок.

Рационализацию подынтегральной функции $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ $(a > 0)$ можно проводить с помощью тригонометрической подстановки $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. При этом если t пробегает отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то переменная x, соответственно, пробегает отрезок $[-a, a]$, что отвечает ОДЗ интеграла. Тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos t| = a\cos t$, так как на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ преобразуется к виду тригонометрического рационального выражения $R(a\sin t, a\cos t)$. В случае $R\left(x, \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ имеем, с учётом ОДЗ, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, а в случае $R\left(x, \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\right)$, соответственно, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Также в этом случае можно было сделать подстановку $x = a\cos t$, где $t \in [0, \pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию $R(a\cos t, a\sin t)$.

Пример 114. Найти $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \;\; (a>0)$.

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$. Поскольку по ОДЗ $x \in [-a, a]$, то положим $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$, и получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t)\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C \quad (|x| \le a).$$

Замечание. Можно было воспользоваться подстановкой $x = a\cos t$, где $t \in [0, \pi]$. □

Пример 115. Найти $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx \;\; (a>0)$.

Решение. *1-й способ.* Положим $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$, и приходим к интегралу

$$a\int \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t dt = a\int \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sin t}{1+\sin t}}\cos t dt =$$

$$= a\int \frac{(1+\sin t)\cos t}{|\cos t|} dt = a\int (1+\sin t) dt = a(t - \cos t) + C =$$

$$= a\left(\arcsin\frac{x}{a} - \cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + C = a\arcsin\frac{x}{a} - a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C =$$

$$= a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C \quad (-a \le x < a).$$

2-й способ. Для сравнения решим задачу с помощью подстановки $x = a\cos 2t$, где $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = -2a\sin 2t dt$, $2t = \arccos\frac{x}{a}$,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \mathrm{sgn}(\sin t) \cdot \frac{\cos t}{\sin t} =$$

$$= \operatorname{sgn}(t) \cdot \frac{\cos t}{\sin t}$$

и, следовательно,

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = -4a \operatorname{sgn}(t) \int \cos^2 t dt = -4a \operatorname{sgn}(t) \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C$$

$$= -a|2t| - a\sin|2t| + C = -a\left|\arccos\frac{x}{a}\right| - a\sin\left|\arccos\frac{x}{a}\right| + C =$$

$$= -a\arccos\frac{x}{a} - a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = -a\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{a}\right) -$$

$$-\sqrt{a^2-x^2} + C = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C_1. \ \square$$

11) *Интегралы вида* $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\, dx$.

Для рационализации выражений вида $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ применяют тригонометрическую подстановку $x = a\operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этом когда переменная t пробегает указанный интервал в направлении от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то переменная x один раз пробегает всё множество действительных чисел от $-\infty$ до ∞ (взаимно однозначная замена переменной). В этом случае для корня $\sqrt{a^2+x^2}$ получаем:

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен, $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a\operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t}\right)$, не содержащему радикалов.

Пример 116. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a > 0)$.

Решение. Положим $x = a\operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приходим к интегралу

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{2})}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{t}{2})}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C, \quad \text{где } t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} \ \ (x \neq 0). \ \square$$

В данной ситуации можно было также использовать подстановку $x = a\operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi)$. Тогда

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{a}{|\sin t|} = \frac{a}{\sin t},$$

так как на рассматриваемом интервале синус положителен, $dx = -\dfrac{adt}{\sin^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a\operatorname{ctg} t, \dfrac{a}{\sin t}\right)$.

Выражения $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ $(a > 0)$ рационализируются также с помощью гиперболической подстановки $x = a\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда с учётом $\operatorname{ch} t > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a|\operatorname{ch} t| = a\operatorname{ch} t.$$

Пример 117. Найти $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ $(a > 0)$.

Решение. Выполним гиперболическую подстановку $x = a\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, $dx = a\operatorname{ch} t dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\operatorname{ch} t$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл

$$a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int t dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t d(2t)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Из равенства $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ находим, что $e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$. Так как $e^t > 0$, то $t = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| - \ln a$. Очевидно, $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = 2\cdot\dfrac{x}{a}\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 + x^2}$, поэтому окончательно получаем (число $-\dfrac{a^2}{2}\ln a$ вошло в C)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C. \ \square$$

12) *Интегралы вида*

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right) dx.$$

Для рационализации подынтегральных выражений применяют как тригонометрические, так и гиперболические подстановки.

Рассмотрим случай $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$. Подкоренное выражение определено при $|x| \geq a$. Возможны подстановки:

а) $x = \dfrac{a}{\sin t}$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, при этом радикал преобразуется следующим образом

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = a\sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} = a\sqrt{\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2} = a|\operatorname{ctg} t|,$$

и подынтегральная функция оказывается рационально зависящей от тригонометрических функций $R\left(\dfrac{a}{\sin t}, a|\operatorname{ctg} t|\right)$.

б) Аналогичная подстановка через косинус $x = \dfrac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, приводит к следующим преобразованиям:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2} = a|\operatorname{tg} t|.$$

И опять подынтегральная функция принимает рациональный (относительно тригонометрических функций) вид $R\left(\dfrac{a}{\cos t}, a|\operatorname{tg} t|\right)$.

в) Подстановка $x = a \operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x > 0$), или $x = -a \operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x < 0$). Тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a|\operatorname{sh} t|,$$

и выражение $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ приводится к виду $R(a \operatorname{ch} t, a|\operatorname{sh} t|)$.

При наличии радикала $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$ в подынтегральном выражении (ОДЗ: $x \in (-\infty, -a) \bigcup [a, +\infty)$) можно воспользоваться подстановкой $x = \dfrac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, и тогда

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos t} - 1}{\frac{1}{\cos t} + 1}} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{2\cos^2 \frac{t}{2}}} = \left|\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right|.$$

С другой стороны, в этом случае возможна подстановка $x = a \operatorname{ch} t$:

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}}{2\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}} = \left|\operatorname{th} \frac{t}{2}\right|.$$

Ещё раз обратим внимание читателя на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ (или $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится аналогичными рассуждениями). Поэтому, учитывая это, в указанных выше подстановках можно ограничиться уменьшенными вполовину промежутками по t:

$$x = \frac{a}{\sin t} \ \text{ при } \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \frac{a}{\cos t} \ \text{ при } \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x = a \operatorname{ch} t \ \text{ при } \ t \in [0, +\infty).$$

Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой ситуации можно использовать также функцию сигнум.

Пример 118. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$ $(x > a > 0)$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x = \dfrac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем $dx = \dfrac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \dfrac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t}$, $\sqrt{(x^2 - a^2)^3} =$

$a^3\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)^3} = a^3\sqrt{\operatorname{tg}^6 t} = a^3 \operatorname{tg}^3 t$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2\sin t}+C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Так как $x = \dfrac{a}{\cos t}$, то $\cos t = \dfrac{a}{x}$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C. \ \square$$

Пример 119. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x > a > 0)$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку: $x = a\operatorname{ch} t$, $t \geq 0$. Тогда $dx = a\operatorname{sh} t dt$,

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a|\operatorname{sh} t| = a\operatorname{sh} t,$$

и интеграл сводится к интегралу $\int dt = t + C$. Сделаем обратную подстановку: $x = a\operatorname{ch} t \ \Rightarrow \ \operatorname{ch} t = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \ t = \operatorname{Arch}\dfrac{x}{a}$, где обратная функция к указанной ветви гиперболического косинуса имеет вид $\operatorname{Arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x \geq 1$. Итак,

$$\int dt = t + C = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C =$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1,$$

где в постоянную C_1 включено слагаемое $(-\ln a)$. $\square$

В некоторых случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида наряду с указанными подстановками можно применять и другие. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 120. Найти $\int \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\,dx$ $(x \geq a > 0)$.

Решение. Положим $x - a = 2a\operatorname{sh}^2 t$, тогда $x + a = 2a(\operatorname{sh}^2 t + 1) = 2a\operatorname{ch}^2 t$, $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\dfrac{2a\operatorname{sh}^2 t}{2a\operatorname{ch}^2 t}} = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $dx = 4a\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt$ и приходим к интегралу

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = 4a\int \operatorname{sh}^2 t dt = 4a\int \frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}dt = a\operatorname{sh}2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $\operatorname{sh}t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}}$, $\operatorname{ch}t = \sqrt{\frac{x+a}{2a}}$, имеем $a\operatorname{sh}2t = 2a\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t = \sqrt{x^2-a^2}$. Далее, $\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t = e^t$, отсюда

$$t = \ln(\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}\right) =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) - \ln\sqrt{2a}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right) + C_1,$$

где $C_1 = C - \ln\sqrt{2a}$. □

10.2.2 Рационализирующие подстановки Эйлера

13) *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера.

1-я подстановка Эйлера применима в случае, когда $a > 0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$). Возведём это равенство в квадрат: $ax^2+bx+c = (t-x\sqrt{a})^2$, откуда после упрощения выражаем x через t: $x = \dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$. Тогда

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} = t - \sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Переходя к новой переменной интегрирования, получаем интеграл от рациональной дроби, после вычисления которого останется сделать обратную подстановку

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}.$$

Пример 121. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(x^2+a>0)$.

Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, то применим 1-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+a} = t - x$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2+a = t^2-2tx+x^2, \text{ или } \quad x = \frac{t^2-a}{2t}.$$

Дифференцируя данное равенство, находим $dx = \frac{t^2+a}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2+a}$ $= \frac{t^2+a}{2t}$. Подставляя в подынтегральное выражение, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C. \square$$

Пример 122. Найти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, здесь также возможно применение 1-й подстановки Эйлера: $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$. Возведём это равенство в квадрат:

$$x^2-x+1 = t^2-2tx+x^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{t^2-1}{2t-1}.$$

Дифференцируя, находим $dx = \left(\frac{t^2-1}{2t-1}\right)' dt = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл $2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt$. Далее представляем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и вычисляем:

$$2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^2}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\frac{3}{2(2t-1)}+C,$$

где $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$. $\square$

2-я подстановка Эйлера применима при вычислении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, если свободный член $c>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$) и возведём данное равенство в квадрат: $ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$. После упрощения и сокращения на $x\neq 0$ имеем для x: $x=\dfrac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$. Тогда

$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}t+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

В результате замены переменной приходим к интегралу от рациональной дроби, вычислив который, в конце подставим

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

Пример 123. Найти $\int\dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Рассмотрим интеграл из предыдущего примера, но теперь вычислим его при помощи 2-й подстановки Эйлера (т. к. свободный член квадратного трёхчлена $c=1>0$, это возможно). Положим $\sqrt{x^2-x+1}=xt-1$, возведём в квадрат

$$x^2-x+1=x^2t^2-2xt+1\ \Rightarrow\quad x=\frac{2t-1}{t^2-1}.$$

Тогда $dx=-2\dfrac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt$, $\sqrt{x^2-x+1}=xt-1=\dfrac{t^2-t+1}{t^2-1}$, $x+\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t}{t-1}$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{3}{2(t+1)} - \frac{3}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{3}{2} \ln |t+1| + \frac{3}{t+1} + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$. $\square$

3-я подстановка Эйлера $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$ применяется при вычислении интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ в случае, когда квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет различные вещественные корни λ и μ, т. е. $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$. Положим

$$\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$$

Возведём равенство в квадрат: $a(x-\lambda)(x-\mu) = t^2(x-\lambda)^2$. Сократим на $x - \lambda \neq 0$ и, выражая x через t, получим $x = \dfrac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}$. Дифференцируя, находим $dx = \dfrac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2} dt$, $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda) = \dfrac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}$. Подставляя в исходный интеграл, получаем интеграл от рациональной дроби. Вычислив его, в конце выполним подстановку

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}.$$

Пример 124. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся 3-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$. Возведём равенство в квадрат: $(a-x)(a+x) = t^2(a-x)^2$, откуда найдём $x = a \cdot \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Тогда получаем следующее соотношение между дифференциалами: $dx = \dfrac{4atdt}{(t^2+1)^2}$. Кроме того, $\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{2at}{t^2+1}$. Переходя к новой переменной под знаком интеграла, получаем при $|x| < a$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C. \square$$

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удаётся более просто вычислить интеграл другим способом.

10.3 Интегрирование биномиальных дифференциалов

Так называются дифференциалы вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где a, b – действительные числа, отличные от нуля, m, n, p – рациональные числа. Как доказал П.Л. Чебышёв,[1] первообразная для функции $x^m(a+bx^n)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях:

а) p – целое; б) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое; в) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

Рассмотрим эти случаи.

а) Если p – целое, то полагают $t=\sqrt[s]{x}$, где s – общий (натуральный) знаменатель дробей m и n.

Пример 125. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}dx$. Очевидно, что $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{3}$, $p=-2$, $a=b=1$. Положим $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx=6t^5dt$, и в результате замены переменной интегрирования приходим к интегралу

$$6\int\frac{t^8dt}{(1+t^2)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt=$$

$$=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3(t^2+1)+t^2}{(1+t^2)^2}\right)dt=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t$$

[1] *Чебышёв Пафнутий Львович* (1821–1894) – русский математик и механик, академик Петербургской АН. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

$$-6\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2},\quad \text{где}$$

$$\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Следовательно, при $x\geq 0$ имеем

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg}t+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$. $\square$

б) Если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое, то полагают $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 126. Найти $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$, откуда определяем $m=1$, $n=\dfrac{2}{3}$, $p=-\dfrac{1}{2}$, $s=2$. Так как $\dfrac{m+1}{n}=3$ – целое, то положим $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. Тогда $x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $dx=\dfrac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}2tdt$. Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(t^2-1)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C,$$

где $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. $\square$

в) Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое, то рекомендуемая подстановка $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 127. Найти $\int\dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Приведём интеграл к виду $\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$ и определим $m=0$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{4}$, $s=4$. Поскольку $\dfrac{m+1}{n}+p=0$ – целое, то положим, следуя рекомендации, $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$. Тогда $x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$, $\sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$. $\square$

10.4 Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования

1) При интегрировании выражений, содержащих радикалы, иногда удобно использование известного приёма *домножения* (с одновременным делением) *на сопряжённое выражение.*

Пример 128. Найти $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ $(a > 0)$.

Решение. На ОДЗ имеем $-a \le x < a$, и поэтому $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$. Домножим и разделим подынтегральную дробь на выражение, сопряжённое знаменателю. В результате интеграл удаётся свести к сумме двух более простых интегралов:

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int \frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C. \square$$

Пример 129. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$ $(a \ne b)$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к знаменателю, т. е. на $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int \sqrt{x+a}\,dx - \int \sqrt{x+b}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int \sqrt{x+a}\,d(x+a) - \int \sqrt{x+b}\,d(x+b)\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$(x \geq -a,\ x \geq -b)$. $\square$

2) В следующем примере помогает простейший приём выделения полного квадрата в подкоренном выражении.

Пример 130. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

Решение. Если заметить, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат, то это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C \quad (x \neq 0). \ \square$$

3) Часто при интегрировании используются различные подстановки, в том числе нестандартные.

Пример 131. Найти $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. Тогда имеем

$$\int \frac{d\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Положим $t = 1+\sqrt{1+x^2}$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C. \ \square$$

Пример 132. Найти $\int x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}dx$ $(a>0)$.

Решение. Согласно ОДЗ, $\dfrac{x}{2a-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, 2a)$. Сделаем тригонометрическую подстановку вида $x = 2a\sin^2 t$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Приходим к интегралу

$$\int (2a\sin^2 t)\sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a-2a\sin^2 t}}\, d\left(2a\sin^2 t\right) = 8a^2 \int \sin^4 t dt =$$

$$= 8a^2 \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 8a^2 \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t\right) dt =$$

$$= 8a^2 \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\right) dt =$$

$$= a^2\left(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Очевидно,

$$\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}},\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}},$$

тогда $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x}{2a}} \cdot \sqrt{\dfrac{2a-x}{2a}} = \dfrac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}$. Найдём $\cos 2t$: если $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x \in [0, a))$, то $\cos 2t > 0$ и $\cos 2t = \sqrt{1-\sin^2 2t} = \sqrt{1 - \dfrac{x(2a-x)}{a^2}} = \dfrac{1}{a}\sqrt{(a-x)^2} = \dfrac{|a-x|}{a} = \dfrac{a-x}{a}$. Если же $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, т. е. $x \in [a, 2a)$, то $\cos 2t \leq 0$ и, следовательно, $\cos 2t = -\sqrt{1-\sin^2 2t} = -\dfrac{1}{a}\sqrt{(a-x)^2} = -\dfrac{|a-x|}{a} = \dfrac{a-x}{a}$. Таким образом, $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2t = \dfrac{a-x}{a}$. Поэтому $\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = \dfrac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)} \cdot \dfrac{a-x}{a}$. Подставляя, получим для исходного интеграла:

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx =$$

$$= a^2\left(3\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{2a}\sqrt{x(2a-x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right) +$$

$$+C = 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C. \ \square$$

4) *Эллиптические интегралы.*

К интегралам от квадратичных иррациональностей естественным образом примыкают интегралы от иррациональностей следующего вида:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+e}\right) dx,$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+r}\right) dx,$$

содержащие под знаком радикала многочлены 3-й и 4-й степеней (с действительными коэффициентами). Эти интегралы часто встречаются в приложениях и, вообще говоря, не являются элементарными функциями. Оба эти интеграла принято называть *эллиптическими* в тех случаях, когда они не выражаются через элементарные функции, и *псевдоэллиптическими* в тех случаях, когда они выражаются через элементарные функции (происхождение названия интегралов связано с тем, что впервые с этими интегралами столкнулись при решении задачи о вычислении длины дуги эллипса). Среди эллиптических интегралов особенно важную роль играют так называемые эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме Лежандра

$$F(k,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad E(k,\varphi) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Для этих функций составлены обширные таблицы и графики. Лежандром и другими математиками изучены свойства данных функций и установлен ряд формул.

10.5 Задачи

Вычислить интегралы с дробно-линейными иррациональностями, используя соответствующие рационализирующие подстановки:

№294. [6, № 1926] $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

№295. [6, № 1927] $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

№296. $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+2}{x^2+1-\sqrt{x+1}+2x}dx$;

№297. [6, № 1930] $\int \dfrac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\cdot\sqrt{x}}$;

№298. $\int \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}\cdot\dfrac{dx}{(2-x)^2}$;

№299. [6, № 1932] $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

Вычислить интегралы с квадратичными иррациональностями, используя соответствующие рационализирующие подстановки:

№300. [6, № 1779] Подобрать максимально возможное количество различных способов вычисления (различных подстановок) для интеграла

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx.$$

Найти интеграл некоторыми из этих способов (наиболее эффективными для данного интеграла).

№301. [6, № 1935] $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Указание: положить $t=\sqrt{x}+\sqrt{1+x}$.

№302. [6, № 1938] $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Указание. Сделать подстановку $t=\dfrac{1}{x+1}$. Есть ли другой способ вычисления интеграла?

№303. [6, №1939] $\int \dfrac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

№304. $\int \dfrac{dx}{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x^2+3x+1}}$.

Указание: положить $t = \dfrac{1}{x-1}$.

№305. $\int \dfrac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$.

№306. [6, №1943] Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x) \cdot y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ и λ – число, найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$$

№307. [6, №1955] Найти $\int \dfrac{P(x)}{Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, разлагая рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби:

$$\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$$

№308. [6, №1960] Найти $\int \dfrac{P(x)}{Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, разлагая рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx.$$

№309. [6, №1961] $\int \dfrac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Указание: положить $t = x + \dfrac{1}{2}$.

№310. [6, № 1966] Применяя подстановки Эйлера:
1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$, если $a > 0$;
2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;
3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$,
найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

№311. [6, № 1967] Применяя подстановки Эйлера, найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

№312. [6, № 1974] $\int \dfrac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

10.6 Ответы и решения

294. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{((t+1)-1)dt}{1+t} = 2(t-\ln|t+1|)+C$$

$$= 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C.$$

295. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$ и приходим к интегралу $(x > 0)$

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} =$$

$$= 6\int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}\right) dt.$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A = 1$, $B = -\dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{3}{2}$, $D = \dfrac{1}{4}$ и т. д.

Ответ: $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2\,(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \dfrac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$

296. Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$$

и сделаем подстановку $t = \sqrt{x+1}$. Тогда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ и приходим к интегралу, вычисляемому разложением подынтегральной функции на сумму элементарных дробей:

$$\int \frac{t+2}{t^4-t}\cdot 2t\,dt = ... = \int \left(-\frac{2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{t}{t^2+t+1}\right) dt$$

и т. д.

297. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[4]{x}$, тогда $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\cdot\sqrt{x}} = 4\int \frac{tdt}{(1+t)^3} =$$

(сделаем ещё одну замену $u = t+1$)

$$= 4\int \frac{(u-1)}{u^3}du = -\frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} + C = -\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C.$$

298. Под знаком интеграла видим дробно-линейную иррациональность $\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$. Согласно рекомендации применим подстановку $t = \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, тогда $x = \dfrac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $2-x = \dfrac{4t^3}{1+t^3}$, $dx = \dfrac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$. Подставляя в интеграл, получим ($x \neq \pm 2$)

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2} = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2}+C = \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

299. Перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}$$

и сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Тогда $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \dfrac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$, $x+1 = \dfrac{2t^3}{t^3-1}$, $x-1 = \dfrac{2}{t^3-1}$ и приходим к интегралу

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2} = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

300. *1-й способ.* Сделаем замену $t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$, тогда $t^2 = \dfrac{x^2}{x^2-2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{2t^2}{t^2-1}$, $xdx = \dfrac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$ и получаем интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\cdot xdx = \int\frac{-2t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = -2\int\frac{(t^2-1)+1}{(t^2-1)^2}dt =$$

$$= -2\int\frac{dt}{t^2-1} + \int\frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2} = -2A + B.$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_1,$$

$$B = \int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t+1| - \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{2}{t-1} + \frac{2}{t+1} + C,$$

где $t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

2-й способ. Интегрирование по частям:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx = \int x\,d(\sqrt{x^2-1}) = x\sqrt{x^2-1} - \int\sqrt{x^2-1}dx = ...$$

3-й способ. Имеем

$$\int\frac{(x^2-2)+2}{\sqrt{x^2-2}}dx = \int\sqrt{x^2-2}dx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = ...$$

4-й способ. По правилу интегрирования биномиального дифференциала $x^m(a+bx^n)^p dx$, получаем

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx = \int x^2(x^2-2)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

где $m = n = 2$, $p = -\dfrac{1}{2}$, при этом $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое.

5-й способ. 1-я подстановка Эйлера ($a = 1 > 0$): $\sqrt{x^2-2} = t \pm x$.

6-й способ. 3-я подстановка Эйлера (есть действительные корни): $\sqrt{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = t(x-\sqrt{2})$.

7-й способ. По формуле

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}},$$

где $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $\lambda = 1$.

8-й способ. Гиперболическая подстановка $x = \sqrt{2}\operatorname{ch} t$.

9-й способ. Переписав интеграл в виде $\int \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{x^2\,dx}{x+\sqrt{2}}$, сделать подстановку $t = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}}$ (дробно-линейная иррациональность).

10-й способ. Тригонометрические подстановки $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin t}$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, или $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

301. Положим $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, тогда $x = \left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)^2$. Переходя к новой переменной, получим $(x \geq 0)$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2t} +$$

$$+\frac{1}{4t^2} + C = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} + C.$$

302. Достаточно рассмотреть случай $x+1 > 0$. Сделаем подстановку $t = \dfrac{1}{x+1}$, тогда $x = -1+\dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1) + (\frac{1}{t} - 1) + 1}} =$$

$$= -\int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = -\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left(\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right) + C.$$

Можно было решать задачу, например, с помощью 1-й подстановки Эйлера $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, тогда интеграл приводится к виду $\int \dfrac{2dt}{t(t+2)}$.

303. Положим $t = \dfrac{1}{1-x}$ (> 0 на ОДЗ), тогда $x = 1 - \dfrac{1}{t}$, $dx = \dfrac{dt}{t^2}$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{t}\right)^2}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{2t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{tdt}{\sqrt{t-\frac{1}{2}}} =$$

(положим $u = \sqrt{t-\frac{1}{2}},\ t = u^2 + \dfrac{1}{2}$)

$$= \sqrt{2}\int\left(\frac{1}{2}+u^2\right)du = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{u^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}}\right)^3 + C = ... =$$

$$= \frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2} + C.$$

304. Положим $t = \dfrac{1}{x-1}$, тогда $x = 1 + \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и в результате перехода к новой переменной приходим при $t > 0$ к интегралу $I = -\int \dfrac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Далее воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = A\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}} +$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Умножим полученное тождество на $2\sqrt{5t^2+5t+1}$:

$$2t^2 = t^2(20A) + t(15A+10B) + (2A+5B+2\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем систему

$x^2: \quad 2 = 20A,$

$x^1: \quad 0 = 15A + 10B,$

$x^0: \quad 0 = 2A + 5B + 2\lambda,$

откуда находим $A = \dfrac{1}{10}$, $B = -\dfrac{3}{20}$, $\lambda = \dfrac{11}{40}$. Далее,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C.$$

Окончательно при $t = \dfrac{1}{x-1}$ имеем

$$I = -\left(\frac{t}{10} - \frac{3}{10}\right)\sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C,$$

или

$$I = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} -$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5} + 2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C \quad (x > 1).$$

305. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{(3(x+1)-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} =$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3 \cdot I_1 + I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов I_1 и I_2. Первый интеграл табличный: $I_1 = \ln \left| x + \dfrac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+3} \right| + C_1$. В интеграле I_2

положим $t = \dfrac{1}{x+1}$ $(t > 0)$:

$$I_2 = \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}-1\right) + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= \ln\left|t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right| + C_2.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3\ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+3}\right|$$

$$+\ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + 1}\right| + C \quad (x+1>0).$$

306. Согласно методу, запишем формулу

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} +$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Умножим обе части на $\sqrt{1+2x-x^2}$:

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (1-x)(ax^2+bx+c) + \lambda$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (для этого многочлены предварительно приводятся к стандартному виду), приходим к системе

$x^3: \quad 1 = -3a,$

$x^2: \quad 0 = 5a - 2b,$

$x^1: \quad 0 = 2a + 3b - c,$

$x^0: \quad 0 = b + c + \lambda,$

откуда находим $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{5}{6}$, $c = -\dfrac{19}{6}$, $\lambda = 4$. Подставим в формулу:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2} +$$

$$+4\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} + C =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

307. Имеем

$$\int \frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx = \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx -$$

$$-\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx = I_1 - I_2.$$

Найдём I_1:

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Дифференцируя и умножая затем на $\sqrt{1+2x-x^2}$, получим

$$x^2 - x + 1 \equiv a(1+2x-x^2) + (ax+b)(-x+1) + \lambda,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$x^2: \quad 1 = -2a,$

$x^1: \quad -1 = 3a - b,$

$x^0: \quad 1 = a + b + \lambda,$

откуда находим $a = b = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda = 2$. Подставляя в интеграл, получаем

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + 2\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} =$$

$$= -\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + \int \frac{d\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2}} =$$

$$= -\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Найдём I_2:

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx =$$

(подстановка $t = \dfrac{1}{x+1}$, $x = \dfrac{1}{t} - 1$)

$$= -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1+2(\frac{1}{t}-1)-(\frac{1}{t}-1)^2}} = -\int \frac{\operatorname{sgn} t\, dt}{\sqrt{1-2(t-1)^2}} =$$

(подстановка $z = \sqrt{2}(t-1)$)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\operatorname{sgn} t\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = ... = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \arcsin(\sqrt{2}(t-1)) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{|1+x|} + C.$$

308. Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

Тогда интеграл разбивается на два интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + C_1$. Для вычисления I_2 сделаем подстановку $t = (\sqrt{x^2+2})' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда $t^2 = \dfrac{x^2}{x^2+2}$,

$x^2 = \dfrac{2t^2}{1-t^2} \Rightarrow xdx = \dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ и получаем

$$\int \frac{x \cdot x\,dx}{x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$+C_2$. Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

309. Выделяя полный квадрат и полагая $t = x + \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} =$$

(подстановка $z = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}$, тогда $t^2 = \dfrac{5z^2}{4(z^2-1)}$, $tdt = -\dfrac{5zdz}{4(z^2-1)^2}$. Тогда при $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ получаем интеграл)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\frac{3}{8}-z^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}z}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}z}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x-1)}+\sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{3(x^2+x-1)}-\sqrt{2}(2x+1)}\right| + C.$$

310. Так как $a = 1 > 0$, то воспользуемся 1-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, тогда $x^2+x+1 = (t-x)^2$, $x = \dfrac{t^2-1}{1+2t}$, $dx = \dfrac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}$ и интеграл примет вид

$$I = 2\int \frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2\,t}dt = 2\int \left(\frac{A}{(1+2t)^2} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{t}\right)dt =$$

$$= 2\int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{(1+2t)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{1+2t} + \frac{1}{t}\right)dt = ... =$$

$$= \frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + C,$$

где $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$, $x \neq -1$.

311. Так как $c = 1 > 0$, то применим 2-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$, тогда $1 - 2x - x^2 = (xt-1)^2$. Упрощая и сокращая на $x \neq 0$, выражаем $x = \dfrac{2(t-1)}{t^2+1}$, $dx = 2\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}dt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

откуда приходим к системе

$$\begin{aligned} t^3:&\quad 0 = A+B+C,\\ t^2:&\quad -1 = -A-C+D,\\ t^1:&\quad 2 = A+B-D,\\ t^0:&\quad 1 = -A, \end{aligned}$$

Решая систему, находим $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -2$. Подставляя в интеграл, получаем

$$I = -\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dt}{t-1} - 2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C, \quad \text{где } t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

312. Разобьём интеграл на два интеграла

$$I = \int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int dx - \int\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Выполним 1-ю подстановку Эйлера $t = x + \sqrt{1+x+x^2}$, тогда $1+x+x^2 = (x-t)^2$, $x = \dfrac{t^2-1}{2t+1}$, $dx = \dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$ и приходим к интегралу

$$I = x - 2\int \frac{t^2+t+1}{(1+t)(2t+1)^2}dt = ... =$$

$$= \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C.$$

11 СЕМИНАР: Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

«Чтобы узнать, что будет, надо к тому, что было, прибавить то, что есть».
Народная мудрость.

Домашнее задание (из этой книги): 313, 316-318, 320-323, 325-326, 328, 329, 332-335, 339-341, 353-356.

$+$ **ПОДГОТОВКА К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ 11 декабря** (повторение всего материала перед предстоящими контрольной и зачётными работами)

При интегрировании тригонометрических функций наряду с алгебраическими преобразованиями эффективно используются всевозможные тригонометрические преобразования. Все интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны. В простейших случаях интегралы вычисляются непосредственным сведением их к табличным. Но в большинстве случаев надо знать подходы и осознанно применять их там, где нужно. Рассмотрим отдельные классы интегралов от тригонометрических функций и общие рекомендации по их вычислению.

11.1 Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$

Здесь, как и прежде, под R понимается рациональная функция своих аргументов. Это достаточно широкий класс интегралов, если учесть, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ также выражаются через синус и косинус. Интегралы данного вида вычисляются следующими методами.

1. Метод универсальной подстановки. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ $\left(\text{или } t = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$.[1] Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, и далее интегралы вычисляются соответствующими методами интегрирования рациональных дробей. Обратим внимание на то, что в общем случае применение подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ $(-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n)$. В дальнейшем это подразумевается. К недостаткам этого подхода можно отнести тот факт, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям. В частности, этим методом можно вычислять интегралы вида $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

Пример 133. Вычислить $\int \dfrac{dx}{\sin x + 2}$.

Решение. Используем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{где } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \ \square$$

2. В некоторых случаях вычисление интегралов данного типа может быть упрощено за счёт выбора других, более удачных, подстановок.

Случай, когда $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$.

Если подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, т. е. при всех x из области интегрирования верно

[1] В силу периодичности функция $R(\sin x; \cos x)$ с периодом 2π, достаточно вычислить интеграл, например, на промежутке $x \in (-\pi, \pi)$, тогда $\frac{x}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. В случае подстановки в виде котангенса можно взять $x \in (0, 2\pi)$.

$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Пример 134. Вычислить $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 135. Вычислить $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Решение. Заметив, что подынтегральная функция $\frac{\sin x(1 + \sin^2 x)}{1 - 2\sin^2 x}$ нечётна относительно $\sin x$, сделаем рекомендуемую подстановку $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $-\sin x dx = dt$, и получаем

$$\int \frac{\sin x(1 + \sin^2 x)}{1 - 2\sin^2 x} dx = \int \frac{(2 - \cos^2 x)(-d\cos x)}{2\cos^2 x - 1} = \int \frac{(t^2 - 2)dt}{2t^2 - 1} =$$

$$= \int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C =$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C, \quad \text{где } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}. \ \square$$

Случай, когда $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$.

Если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т. е. при всех допустимых x верно равенство $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \sin x$.

Пример 136. Вычислить $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция

$$\frac{(\cos^2 x + \cos^4 x)\cos x}{1 - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2}$$

нечётна относительно косинуса x, то положим $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} d(\sin x) = \int \frac{(1-\sin^2 x)(2-\sin^2 x)}{\sin^2 x(1+\sin^2 x)} d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2(1+t^2)} = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C,$$

где $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Случай, когда $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$.

Если подынтегральная функция $R(\sin x; \cos x)$ чётна относительно синуса и косинуса, т. е. при всех допустимых x выполняется тождество $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то к цели приводит подстановка $t = \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ (или $t = \operatorname{ctg} x$, где $x \in (\pi n, \pi + \pi n)$), $n \in \mathbb{Z}$. В данном случае в силу периодичности подынтегральной функции с периодом $T = \pi$, достаточно вычислить интеграл при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этом из тождества $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ имеем

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

где $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. В частности, этим способом можно вычислять тригонометрические интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}.$$

Пример 137. Вычислить $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1) - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Однако проще было поступить следующим образом:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \square$$

Пример 138. Вычислить $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1)} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x + 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C \quad (\operatorname{tg} x \neq -1 \pm \sqrt{2}). \square$$

Теорема (*общий случай*). Любое рациональное выражение $R(u, v)$ аргументов u и v всегда можно представить в виде суммы трёх выражений, рассмотренных выше:

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} +$$

$$+ \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2},$$

или $R(u, v) = R_1(u, v) + R_2(u, v) + R_3(u, v)$, где функция $R_1(u, v)$ – нечётна относительно u, функция $R_2(u, v)$ – нечётна относительно v, а функция $R_3(u, v)$ – чётна относительно u и v.

Поэтому мы рассмотрели весьма общий подход к интегрированию рациональных выражений от тригонометрических функций.

11.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$**,** $\int \cos^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$. Эти интегралы можно вычислять, последовательно понижая степень с помощью соответствующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4},$$

$$\sin^4 x = \frac{3-4\cos 2x + \cos 4x}{8}, \ \cos^4 x = \frac{3+4\cos 2x + \cos 4x}{8} \text{ и др.}$$

Интегрированием по частям можно вывести общие формулы понижения степени для интегралов данного вида.

Пример 139. Вычислить $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

Можно было интегрировать иначе:

$$\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d\cos x =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Пример 140. Вычислить $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int (3-4\cos 2x + \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \ \square$$

Если формулы понижения степени нет под рукой, её легко можно вывести или интегрировать постепенно:

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)dx \quad \text{и т. д.}$$

2. Случай, когда n и m – положительные чётные числа. Если оба показателя n и m – положительные чётные числа, то, как и в предыдущем пункте, применяются формулы понижения для 2-й, 3-й, 4-й и т. д. степеней:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 141. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x \sin^2 2x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x)dx =$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{32}\int (\cos 2x + \cos 6x)dx =$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C =$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C. \square$$

3. Случай, когда n или m – натуральное нечётное число.

Если хотя бы один из показателей n или m – натуральное нечётное число, то рекомендуемая подстановка $t = \sin x$ (если m – натуральное нечётное) или $t = \cos x$ (если n – натуральное нечетное). При этом используются формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а также формулы понижения степени

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \quad \text{и др.}$$

Пример 142. Вычислить $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = -\int \sin^4 x \cos^4 x \, d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \, d(\cos x) =$$

$$= -\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) d(\cos x) =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C. \square$$

4. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности.

Если n и m – целые отрицательные числа одной чётности (оба одновременно чётны либо оба нечётны), то полагают $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$) и применяют формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Также бывает иногда полезно понизить степени в знаменателе, представляя единицу в числителе дроби как тригонометрическую единицу (или её степень).

Пример 143. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \cos^2 x \cdot \cos^6 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}} =$$

$$= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3 \, d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{(1+u^2)^3 \, du}{u^3} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{3}{u} + 3u + u^3\right) du = -\frac{1}{2u^2} + 3\ln|u| + \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 + C =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right). \square$$

Пример 144. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. *1-й способ.* Распишем единицу в числителе как тригонометрическую

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}).$$

2-й способ. Можно было перейти к синусу двойного угла:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x + C. \square$$

В частности, рассмотрим вычисление **интегралов вида** $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Случай $n = 1$. Вычислить интегралы а) $\int \frac{dx}{\sin x}$, б) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

а) Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Другой способ:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

б) Имеем:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

Другой способ:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Случай $n = 2$: табличные интегралы.

Случай $n = 3$: $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2} = -\int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2} = ...$$

Аналогично можно поступить со вторым интегралом.

Случай $n = 4$. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin^4 x}, \qquad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(\operatorname{ctg} x) = -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C \quad (x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Вообще, при $n > 2$ интеграл $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ сводится к рассмотренному выше типу интегралов $\int \sin^n x \cos^m x dx$ для случая, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{2^{n-1}\sin^n x \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cdot \cos^n u}.$$

Интеграл вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ сводится к интегралу типа $\int \frac{dt}{\sin^n t}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin^n(x+\frac{\pi}{2})} = \int \frac{dt}{\sin^n t}.$$

Интегралы от нечётной натуральной степени секанса или косеканса находятся по рекуррентным формулам понижения:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}, \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}. \tag{2}$$

5. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное.

Если n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное, то полагают $t = \sin x$ (если m – нечётное) или $t = \cos x$ (если n – нечётное). Иногда в случае больших степеней n и m с целью понижения этих степеней полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить единицу тригонометрической единицей в виде суммы $\sin^2 x + \cos^2 x$ или даже её степенью.

Пример 145. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$.

Решение. Представим единицу в числителе как квадрат тригонометорической:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 dx}{\sin^3 x \cos^4 x} =$$

$$= \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} =$$

(во втором интеграле ещё раз распишем единицу в числителе, теперь просто как тригонометрическую)

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} =$$

(все интегралы уже вычислялись ранее)

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right). \ \square$$

6. Случай, когда один из показателей степеней чётный, а другой – целый отрицательный.

Если n – чётное число, а m – целое отрицательное число, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, и в этом случае интеграл сводится к интегралу вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$. В случае чётного m и целого отрицательного n аналогично заменяют $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Если оба показателя n и m – чётны, то полагают $t = \operatorname{tg} x$. Если оба показателя степени отрицательны, то с целью понижения этих степеней иногда рекомендуется заменить единицу в числителе подынтегральной функции суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ или её степенью.

Пример 146. Вычислить $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^5 x}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Осталось подставить вместо I_1, I_2 и I_3 известные выражения для этих интегралов (первый из интегралов вычисляется в одной из задач в конце данного параграфа:

$$I_1 = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|).$$

Ответ: $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} - \frac{5\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 147. Вычислить $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2(t^2+1)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3}{3} + C,$$

где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □

7. Случай, когда один из показателей степеней нечётный, а другой – целый отрицательный.

Если n – нечётное число, а m – целое отрицательное число, то полагают $t = \cos x$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

В случае, когда m – нечётное, а n – целое отрицательное число, полагают $t = \sin x$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Пример 148. Вычислить $\int \dfrac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin^6 x\, d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^3\, d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= -\int \frac{1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6}{u^2} du = \frac{1}{u} + 3u - u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + 3\cos x - \cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right). \square$$

11.3 Интегралы вида $\int \sin(ax)\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$, а также $\int \sin(ax)\sin(bx)\sin(cx)dx$ и др.

Эти интегралы находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 149. Вычислить $\int(\cos 3x \cdot \cos x)dx$.

Решение. Имеем

$$\int \cos 3x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \square$$

11.4 Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ рассмотрите отдельно. При $n > 2$ указанные интегралы вычисляются с помощью формул

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

которые последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

Пример 150. Вычислить $\int \operatorname{tg}^7 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{tg}^7 x dx = \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x) +$$

$$+ \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}\right). \ \square$$

11.5 Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$, $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ можно сделать универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Вместе с тем можно сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)},$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и положить далее $t = \operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\ln|t|+C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+C.$$

2. Интегралы вида $\int\dfrac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$ вычисляются универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 151. Вычислить $\int\dfrac{dx}{3\sin x+\cos x}$.

Решение. *1-й способ.*

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x} = \int\frac{dx}{\sqrt{10}\cdot\sin(x+\varphi)},$$

где $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Положим $t = \operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|t|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+C \quad (\sin(x+\varphi)\neq 0).$$

2-й способ.

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x} = \int\frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int\frac{dx}{\left(6\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}} = -2\int\frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-6\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} =$$

$$= -2\int\frac{dt}{(t-3)^2-10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right| + C \quad (\cos\frac{x}{2} \neq 0). \ \square$$

Пример 152. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

Решение. Помимо метода универсальной подстановки, этот интеграл можно также вычислить следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = -\int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = -\int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} =$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \quad (x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}). \ \square$$

11.6 Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}$, $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cdot\cos(x+b)}$

Для вычисления первого из интегралов используется искусственный приём умножения и одновременного деления подынтегральной функции на выражение $\sin(a-b)$ ($\neq 0$) с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a-b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C.$$

Второй интеграл вычисляется аналогично.

Интегралы вида $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}$ с помощью формул приведения сводятся к одному из предыдущих видов, например

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = -\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(x+(b-\frac{\pi}{2})\right)} \text{ и т. д.}$$

11.7 Интегралы вида $\int \dfrac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\int \dfrac{dx}{\cos x - \cos a}$

При вычислении первого из интегралов следует умножить и разделить подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользоваться тождествами

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}, \quad \cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right).$$

11.8 Интегралы вида $\int \dfrac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$.

При вычислении интгралов данного вида представим числитель $a_1\sin x + b_1\cos x$ дроби в виде линейной комбинации знаменателя $a\sin x + b\cos x$ и его производной $a\cos x - b\sin x$:

$$a_1\sin x + b_1\cos x \equiv A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

где A и B – постоянные. Найдём A и B методом неопределённых коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты, соответственно, при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому приходим к системе

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb, \\ b_1 = Ab + Ba, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{a_1 a + b_1 b}{a^2+b^2}, \\ B = \dfrac{ab_1 - a_1 b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx =$$

$$= \int \frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{a\sin x + b\cos x} dx =$$

$$= Ax + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x} = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

Пример 153. Вычислить $\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} dx$.

Решение. Представим числитель в виде

$$\sin x - 3\cos x \equiv A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} 1 = 4A - 5B, \\ -3 = 5A + 4B, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{11}{41}, \\ B = -\frac{17}{41}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к интегралу

$$\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} dx = -\frac{11}{41}\int dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} =$$

$$= -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C. \ \square$$

11.9 Интегралы, берущиеся по частям

Часто в ситуациях, когда под знаком интеграла помимо тригонометрической функции находится функция другого типа (алгебраический многочлен, логарифмическая или показательная), для вычисления интеграл применяется метод интегрирования по частям.

Пример 154. Вычислить $\int \cos^2(\sqrt{x})dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2tdt$ и приходим к интегралу ($x \geqslant 0$)

$$\int \cos^2(\sqrt{x})dx = 2\int t\cdot\cos^2 t dt = \int t(1+\cos 2t)dt = \frac{t^2}{2} + \int t\cdot\cos 2t dt.$$

Последний интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$I = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x}) + C.$$

Пример 155. Вычислить $\int \dfrac{x \cdot \cos x\, dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x \cdot \cos x\, dx}{\sin^3 x} = \int \frac{x\, d(\sin x)}{\sin^3 x} = \int x\, d\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Пример 156. Вычислить $\int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx$.

Решение. Имеем

$$\int (x \cdot \operatorname{tg}^2 x) dx = \int x\, d(\operatorname{tg} x - x) = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right). \square$$

11.10 Интегрирование гиперболических, показательных, логарифмических выражений

При интегрировании выражений, содержащих логарифмические, гиперболические и прочие трансцендентные функции, для преобразований используются соответствующие формулы. При этом большинство практических приёмов интегрирования гиперболических функций имеют свои аналоги среди соответствующих приёмов, разработанных для тригонометрических функций.

Пример 157. Вычислить $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx$.

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем

$$\int \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1 + \operatorname{ch} 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\operatorname{ch} 2x + \frac{1 + \operatorname{ch} 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 4x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x\right) + C. \square$$

Если подынтегральное выражение содержит показательную функцию, то либо этот интеграл сводится к табличному, либо следует подобрать соответствующую подстановку (внести подходящую функцию под знак дифференциала), либо проинтегрировать по частям.

Пример 158. Вычислить $\int (2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x})\, dx$.

Решение. Имеем

$$\int (2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x})\, dx = \int (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^x dx = \int 2250^x dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C. \ \square$$

Пример 159. Вычислить $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{dx}{x^3}$.

Решение. Внесём $\dfrac{1}{x^3}$ под знак дифференциала: $\dfrac{dx}{x^3} = d\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ и получим

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C \quad (x \neq 0). \ \square$$

Если подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию, то так же, как и в случае с показательной функцией, интеграл либо сводится к табличному, либо берётся с помощью некоторой подстановки, либо интегрируется по частям.

Пример 160. Вычислить $\int \ln^2 x\, dx$.

Решение. Дважды интегрируя при $x > 0$ по частям, находим

$$\int \ln^2 x\, dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x\, dx =$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C. \ \square$$

Пример 161. Вычислить $\int x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, получаем

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \quad (x > 0). \square$$

При интегрировании обратных тригонометрических функций используются всё те же общие приёмы интегрирования (преобразования, замена переменной, интегрирование по частям). Интегралы вида

$$\int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \arccos x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен, вычисляются интегрированием по частям.

Пример 162. Вычислить $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1 - x^2}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4 \arcsin^4 x} + C \ (0 < |x| < 1).$$

Пример 163. Вычислить $\int \arccos x dx$.

Решение. Полагая $u = \arccos x$, $dv = dx$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x + \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) = x \cdot \arccos x -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C \quad (|x| < 1). \square$$

Пример 164. Вычислить $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \ \square$$

11.11 Задачи

Используя универсальные тригонометрические подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ или $t = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, вычислить интеграл:

№313. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x(1-\cos x)}$;

№314. [6, № 2025] $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$;

№315. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$;

Используя подстановки $t = \sin x$ или $t = \cos x$, вычислить интегралы:

№316. [6, № 1991] $\int \cos^5 x dx$;

№317. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx$;

№318. $\int \frac{\sin 2x dx}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}$;

№319. $\int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$.

Используя подстановки $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$, вычислить интегралы:

№320. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$;

№321. [6, № 2007] $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$;

№322. [6, № 2029] $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$;

№323. [6, № 2034] $\int \dfrac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

Используя различные приёмы, вычислить интегралы от тригонометрических функций:

№324. [6, № 2013] $\int (\sin 5x \cdot \cos 3x) dx$;

№325. $\int \left(\sin x \cdot \sin \dfrac{x}{2} \cdot \sin \dfrac{x}{3}\right) dx$;

№326. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^2 x}$;

№327. [6, № 1992] $\int \sin^6 x dx$;

№328. $\int \cos^6 x dx$;

№329. [6, № 2001] $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$;

№330. а) $\int \dfrac{dx}{\sin^5 x}$, б) $\int \dfrac{dx}{\cos^5 x}$;

Указание: воспользоваться рекуррентными формулами (1),(2).

№331. $\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x}$;

№332. [6, № 2009] $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

№333. [6, № 2017] $\int \cos^2(ax) \cdot \cos^2(bx) dx \quad (a \neq \pm b)$;

№334. $\int \dfrac{dx}{\sin(x+1) \cdot \sin(x-2)}$;

№335. [6, № 2020] $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)}$ $(a - b \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n)$.

Указание. Воспользоваться тождеством

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos((x+\alpha) - (x+\beta)).$$

№336. $\int \dfrac{dx}{\sin(x-1)\cos x}$;

№337. Вывести формулу понижения для интегралов

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}, n > 2).$$

№338. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$;

№339. [6, № 2037] $\int \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

№340. [6, № 2038] $\int \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x}dx;$

№341. [6, № 2043] $\int \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx;$

№342. [6, № 2043(б)] $\int \dfrac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx.$

Используя различные приёмы, вычислить интегралы от гиперболических, показательных, логарифмических, обратных тригонометрических и смешанных функций:

№343. $\int \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}dx;$

№344. $\int (\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x)dx;$

№345. $\int (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x)\,dx;$

№346. $\int \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}dx;$

№347. $\int \dfrac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}};$

№348. $\int \dfrac{dx}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)};$

№349. $\int \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3 dx;$

№350. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx;$

№351. $\int (x^2 \cdot \arccos x)dx;$

№352. $\int (2x^2 - 1)\cos 2x dx;$

№353. а) $\int \sin(\ln x)dx$, б) $\int \cos(\ln x)dx;$

№354. $\int \dfrac{x \cdot \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx;$

№355. [6, № 2157] $\int \dfrac{x \cdot \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx;$

№356. [6, № 2159] $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx.$

11.12 Ответы и решения

313. Положим $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2tdt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t^2}dt = -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

314. Имеем

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} =$$

$$= \int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= 2\int \frac{d(\frac{x}{2})}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \int \frac{d(\frac{x}{2})}{4\cos^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 6\sin^2\frac{x}{2}} =$$

(подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$)

$$= 2\int\frac{dt}{4+4t+6t^2} = \int\frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

315. Применив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, придём к интегралу

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C \quad (x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

316. Даже если сразу мы не видим нужную подстановку, следует преобразовать подынтегральное выражение, и тогда необходимая подстановка становится очевидной:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2\, d(\sin x) =$$

(подстановка $t = \sin x$)

$$= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

317. Приведём интеграл к виду $\int \sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} x dx$ и сделаем подстановку $t = \cos x$:

$$-\int (1 - t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = \int (t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}}) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

318. Так как подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, то в результате подстановки $t = \cos x$ получаем

$$\int \frac{-2t dt}{4\left(t^2 + 3t + \frac{9}{4}\right) - 16} = -\frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{u du}{u^2 - 4} + \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left| \left(\cos x + \frac{3}{2} \right)^2 - 4 \right| + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{1}{2}} \right| + C,$$

где $x \neq \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

319. Замечая, что подынтегральная функция нечётна относительно косинуса, положим $t = \sin x$:

$$\int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^2 + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4+1} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1}{\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sin x+1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\right) + C.$$

320. Поделив одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, приходим к интегралу ($\operatorname{tg} x \neq -1$):

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg} x} = -\ln|1+\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x + C.$$

321. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x\cos^8 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} =$$

$$= \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}d(\operatorname{tg} x) = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C \quad \left(\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right).$$

322. Имеем ($t = \operatorname{tg} x$):

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx = x - \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = x - \int \frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x} =$$

$$= x - \int \frac{dt}{2t^2+1} = x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C =$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

323. Положим $t = \operatorname{ctg} x$, $dx = -\dfrac{dt}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$, тогда

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x+\cos^3 x} = \int \frac{\frac{1}{\sin^2 x}dx}{1+\operatorname{ctg}^3 x} = \int \frac{(1+\operatorname{ctg}^2 x)dx}{1+\operatorname{ctg}^3 x} =$$

$$= -\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^3)(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{1+t^3} = -\int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}\right) dt =$$

$$= -\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}\right) dt = ...$$

$$= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} + C.$$

324. Имеем

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

325. Имеем

$$\frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{3} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(-\sin \frac{x}{6} + \sin \frac{5x}{6} + \sin \frac{7x}{6} - \sin \frac{11x}{6}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{32} \cos \frac{11x}{6} + C.$$

326. Распишем единицу в числителе как тригонометрическую:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C \quad (x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}).$$

327. Имеем

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8} \int (2\sin^2 x)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} x -$$

$$-\frac{3}{8}\int\cos 2x dx+\frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

328. Имеем

$$\int(\cos x^2)^3dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\int(1-\sin^2 2x)\cos 2x dx=$$

$$=\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3x}{16}+\frac{3}{64}\sin 2x+\frac{1}{8}\int\cos 2x dx-$$

$$-\frac{1}{16}\int\sin^2 2x d(\sin 2x)=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

329. Имеем при $\sin 2x\neq 0$:

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=2^4\int\frac{dx}{\sin^4 2x}=2^4\int(1+\operatorname{ctg}^2 2x)^2dx=$$

$$\left(d(\operatorname{ctg} 2x)=-\frac{2}{\sin^2 2x}dx=-2(1+\operatorname{ctg}^2 2x)dx\right)$$

$$=-2^3\int(1+\operatorname{ctg}^2 2x)d(\operatorname{ctg} 2x)=-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+C.$$

330. а) Применяя рекуррентную формулу (2) при $n=2$, получим

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\sin^4 x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Полагая теперь $n=1$, по той же формуле имеем

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Окончательно имеем:

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\quad(x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}).$$

б) Действуя аналогично, получаем

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

331. Имеем

$$\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \operatorname{tg}^4 x \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^2 d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + 2\int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right).$$

332. Положим $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, тогда $\operatorname{tg} x = t^2$, $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = 2tdt$, $(1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = 2tdt$ и получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\int \frac{dt}{1 + t^4} = 2\int \frac{dt}{(t^4 + 2t^2 + 1) - 2t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)} =$$

$$= 2\int \left(\frac{At + B}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\right) dt =$$

(методом неопределённых коэффициентов находим $A = -C = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = D = \dfrac{1}{2}$)

$$= ... = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{t^2 - 1} + C,$$

где $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

333. Имеем

$$\int \cos^2(ax)\cdot\cos^2(bx)dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2ax)(1 + \cos 2bx)dx =$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1+\cos 2ax+\cos 2bx+\frac{1}{2}(\cos 2x(a-b)+\cos 2x(a+b))\right)dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}+C.$$

334. Метод решения рассмотрен в тексте пособия.

335. Имеем

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\cdot\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx+\int\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}dx\right)=...$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C,\quad \cos(a-b)\neq 0.$$

336. Преобразуем интеграл при условии $\sin(x-1)\cos x\neq 0$:

$$\int\frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(x-1)\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=$$

$$=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}-1)}\int\frac{\sin((x-1)+(\frac{\pi}{2}-x))}{\sin(x-1)\sin(\frac{\pi}{2}-x)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\frac{\sin(x-1)\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(x-1)\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(x-1)\sin(\frac{\pi}{2}-x)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}(-\ln|\cos x|+\ln|\sin(x-1)|)+C=\frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\cos x}\right|+C.$$

337. Эффекта понижения степени удаётся добиться путём интегрирования по частям:

$$I_n=-\int\sin^{n-1}x d\cos x=$$

$$-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n=\frac{1}{n}\left((n-1)I_{n-2}-\cos x\sin^{n-1}x\right),\quad n=3,4,...$$

338. Имеем

$$\int\sin^4 x\cos^2 xdx=\int(\sin x\cos x)^2\sin^2 xdx=$$

$$=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1-\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

339. Имеем

$$\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=-\int\frac{\cos 2x\,dx}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin 2x)}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-\frac{1}{2}u^2}=\int\frac{du}{u^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C.$$

340. Имеем

$$\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{1+(\frac{1-\cos 2x}{2})^2}dx=$$

(положим $t=\cos 2x$)

$$=-\int\frac{dt}{t^2-2t+5}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)+C.$$

341. Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$\sin x - \cos x \equiv A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x).$$

Приравнивая, соответственно, коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях тождества, получаем

$$\begin{cases} 1 = A - 2B, \\ -1 = 2A + B, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5}, \\ B = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к интегралу

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx = \int \frac{-\frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x) - \frac{3}{5}(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} dx =$$

$$= -\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + C.$$

342. Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$\sin x \equiv A(\sin x - 3\cos x) + B(\cos x + 3\sin x),$$

откуда, приравнивая коэффициенты, соответственно, при $\sin x$ и $\cos x$, получаем систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} 1 = A + 3B, \\ 0 = -3A + B, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{10}, \\ B = \frac{3}{10}. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x} dx = \int \frac{\frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) + \frac{3}{10}(\cos x + 3\sin x)}{\sin x - 3\cos x} dx =$$

$$= \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}\int \frac{d(\sin x - 3\cos x)}{\sin x - 3\cos x} = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}\ln|\sin x - 3\cos x| + C.$$

343. Имеем

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}\right) + C.$$

344. Используя формулу преобразования произведения гиперболических косинусов $\operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha-\beta) + \operatorname{ch}(\alpha+\beta))$, получаем

$$\int (\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x) dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x) dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + C.$$

345. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы, получаем

$$\int (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x)\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x(\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 4x) dx = \frac{1}{24}\operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16}\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2x + C.$$

346. Положим $t = e^x$, тогда

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + \arcsin\frac{1}{t} + C =$$

$$= \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) + \arcsin(e^{-x}) + C \quad (x \geqslant 0).$$

347. Положим $t = e^{\frac{x}{6}}$, тогда

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{dt}{t(1+t+t^2+t^3)} = 6\int \frac{dt}{t(1+t)(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+1} + \int \frac{Ct + D}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{Ax}{6} + B\ln\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right) + \frac{C}{2}\ln\left(1 + e^{\frac{x}{3}}\right) + D\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C_1.$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A = 6$, $B = C = D = -3$. Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = x - 3\ln\left(\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}}\right) - 3\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C_1.$$

348. Принимая во внимание, что $\dfrac{dx}{x\ln x} = d(\ln(\ln x)))$, имеем при $x > 1$:

$$\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x)))}{\ln(\ln x))} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

349. Проинтегрируем три раза по частям:

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{1}{x^3}\cdot\ln^3 x dx = -\frac{1}{2x^2}\cdot\ln^3 x + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x^3}\cdot\ln^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\ln^3 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln^2 x + \int\frac{1}{x^3}\cdot\ln x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\cdot\ln^2 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4x^2}\left(\frac{2}{3}\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2}\right) + C \quad (x > 0).$$

350. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int\frac{xdx}{2\sqrt{x}(x+1)} = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} -$$

$$-\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}\right)dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int\frac{d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2+1} =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \quad (x > 0).$$

351. Положим $u = \arccos x$, $x^2dx = dv$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int(x^2\cdot\arccos x)dx = \int\arccos x\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| \leqslant 1$):

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2\, d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}d(x^2)=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

352. Разобьём интеграл на два интеграла и проинтегрируем первый из них по частям:

$$\int(2x^2-1)\cos 2x dx=2\int x^2\cos 2x dx-\int\cos 2x dx=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\cdot x^2-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2x dx\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=$$

$$=\sin 2x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-\left(-x\cdot\cos 2x+\int\cos 2x dx\right)=$$

$$=\sin 2x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+x\cdot\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C=$$

$$=\sin 2x\left(x^2-1\right)+x\cdot\cos 2x+C.$$

353. Интегрируя по частям каждый из интегралов, имеем:

$$I_1=\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-I_2,$$

$$I_2=\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+I_1.$$

Отсюда находим

$$I_1=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C,$$

$$I_2=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C\quad(x>0).$$

Можно было бы найти эти интегралы, интегрируя последовательно каждый из них два раза по частям.

354. Интегрируя по частям, находим

$$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d(\sqrt{1+x^2})=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int dx=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

355. Преобразовав подынтегральное выражение, проинтегрируем по частям ($x \neq \pm 1$):

$$\int \frac{x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{1}{1-x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Вычислим последний интеграл подстановкой $t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{1-2t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C.$$

356. Преобразовав подынтегральное выражение, проинтегрируем по частям:

$$\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{arctg} x \cdot d((1+x^2)^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int (1+x^2) dx = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + C.$$

Предметный указатель

Список литературы

[1] *Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И.* Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.

[2] *Бутузов В.Ф.* Лекции по математическому анализу. Часть II. Учеб. пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2014.

[3] *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Шапкина Н.Е.* Равномерная непрерывность функций одной переменной. Пособие для студентов I курса. Москва, Физфак МГУ, 2010.

[4] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 2000. – 725 с.: ил.

[5] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.: ил.

[6] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624с.

[7] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. Гл. V. Дифференциальное исчисление. 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2001.

[8] *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. В 2 ч. Часть 1 / Учебник для академического бакалавриата. – 4-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2013. – 660 с. – (Бакалавр. Углублённый курс).

[9] *Краснова С.А., Уткин В.А.* Основы математического анализа. Учебное пособие. – М.: РГГУ, 2010. – 551с.

[10] *Никитин А. А.* Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 353 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[11] *Пантаев М. Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Том 1. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 368 с.

[12] *Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной: Учеб. пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 156 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[13] *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.

[14] *Сизый С.В.* Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 128с.

[15] Справочное пособие по высшей математике. В 5 томах. Том 1. Математический анализ. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. 2001.

[16] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I / Г. М. Фихтенгольц. — 9-е изд. — СПб. : Лань, 2016.

[17] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Неопределённый интеграл / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 187 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

Рекомендуемые книги автора по другим разделам математического анализа:

[18] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Тождественные равенства и неравенства и их применение: В помощь практическим занятиям: Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 272 с.

[19] *Садовничая И. В., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 1 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 242 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

[20] *Садовничая И. В., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 2 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 199 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

Книга содержит 164 примеров и 356 задач для самостоятельной работы (с решениями).

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(Самоучитель)

Книга 2

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
для очной и дистанционной форм обучения
студентов университетов

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова

Лицензия ИД № 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Напечатано с готового оригинал-макета
Изд. отдел факультета ВМК МГУ
Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 2020 г.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 9,5. Тираж 450 экз. Заказ .

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.